УДК 531.383

ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКИХ ДО ВИПАДКУ ЛАГРАНЖА, ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО МОМЕНТУ

Акуленко Л. Д.[1], Лещенко Д. Д.[2], Козаченко Т. О.[2]
[1]Інститут проблем механіки ім. О. Ю. Ішлінського РАН
[2]Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: В космонавтиці, гіроскопії, під час входу літальних апаратів в атмосферу виникають ряд задач, які пов'язані з обертальними рухами тіла відносно нерухомої точки. У багатьох випадках в якості руху твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. В роботі розглядається рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які повільно змінюються з часом. У випадку, коли відновлюючий момент, не залежить від часу, отримуємо модель важкого вовчка. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла при значеннях малого параметра ε, відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. Процедура усереднення у випадку Лагранжа, на відмінну від процедури усереднення у випадку Ейлера-Пуансо, дозволяє нам розглядати рух з обертальними моментами зовнішніх сил, які є великими за абсолютною величиною, як породжувальний рух. Для можливості використання метода усереднення у системі рівнянь збуреного руху, за допомогою ряду перетворень, змінні розділяємо на повільні та швидкі. Наведені умови можливості усереднення рівнянь руху за фазою кута нутації. Одержана усереднена система рівнянь першого наближення для повільних змінних. За допомогою методу усереднення порядок системи рівнянь зменшився з шести до трьох, що полегшує розв'язання задачі.

Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух тіла, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Усереднена система проінтегрована чисельно при різних початкових умовах і параметрах задачі. Повна енергія тіла, кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії спадають. Проекція вектору кінетичного моменту на вертикаль наближається до нуля. Під дією дисипативного моменту тіло прагне до рівноваги. Досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла відносно нерухомої точки з урахуванням нестаціонарних відновлюючого і збурюючого моментів.

Ключові слова: випадок Лагранжа, відновлюючий і збурюючий моменти, лінійна дисипація.

EVOLUTION OF ROTATIONAL MOTIONS OF A RIGID BODY CLOSE TO THE LAGRANGE CASE UNDER THE ACTION OF AN UNSTEADY TORQUE OF FORCES

L. Akulenko[1], D. Leshchenko[2], T. Кozachenko[2]
[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS
[2]Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: We investigate a new problem of the motion of a rigid body about a fixed point under the action of perturbation torque of forces of different physical nature. The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point attract the attention of researches. The perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case under the action of restoring torque and perturbation torque that are slowly varying in time are investigated, conditions for the possibility of averaging the system of

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-18-26

equations is obtained. In contrast to the procedure of averaging with respect to the Euler-Poinsot motion, averaging with respect to Lagrange motion permits us to examine the motion with external force torques, large in absolute value, as the generating motion.

The paper develops an approximate solution to a specific set of dynamic equations. These equations are the basic Euler equations with the symmetric heavy mass assumption and an additional $\varepsilon M_i (i=1,2,3)$ perturbation term (where ε is a small quantity). We describe an averaging procedure for slow variables of a perturbed motion of a rigid body, where the motion is close to Lagrange case in the first approximation. Conditions for the possibility of averaging the equations of motion with respect to the nutation phase angle are presented. The averaged system of equations is obtained and qualitative analysis of motion is conducted. At is further assumed that the problem can be decomposed into slowly and quickly changing variable, that one quickly changing variable (θ, the nutation angle) has 2π periodicity, and thus that averaging with respect to phase angle θ can be accomplished with a small resulting error in the results. The averaging technique reduces the system order from 6 to 3, making the system autonomous, and contains only slowly changing variables, thus facilitating numerical solution. An example using linearly dissipative torques is worked out to demonstrate the use of the general equations. We shall assume that the drag force generated by the motion of the body is equivalent to a small dissipative torque vector. The classic Lagrange top can be considered as an integrable limit of the problem.

Keywords: Lagrange case, restoring and perturbation torques, linear dissipation**.**

1. ВСТУП

Проблема еволюції обертань твердого тіла відносно нерухомої точки привертає увагу дослідників. В космонавтиці, гіроскопії, під час входу літальних апаратів в атмосферу виникають ряд задач, які пов’язані з обертальними рухами тіла відносно нерухомої точки. У багатьох випадках в якості руху твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. Тобто тіло знаходиться в полі сили ваги, а також центр мас тіла і нерухома точка знаходяться на осі динамічної симетрії тіла. Відновлюючий момент сил, аналогічний моменту сили ваги, створюється аеродинамічними силами, що діють на тіло у потоці газу. Тому рухи, які близькі до випадку Лагранжа, досліджувалися у ряді робіт з динаміки літальних апаратів, де враховувалися відновлюючий і збурюючі моменти.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Збурені рухи твердого тіла, які близькі до випадку Лагранжа, досліджені у ряді робіт, наприклад [1–11]. У [1, 2, 5–8] наведені умови можливості усереднення рівнянь руху тіла, близького до випадку Лагранжа, по фазі кута нутації. Отримана усереднена система рівнянь і розглянуто рух тіла в середовищі з лінійною дисипацією. Досліджені збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією моменту сил, що повільно змінюється за часом. Розглянуті обертання твердого тіла, які близькі до регулярної прецесії у випадку Лагранжа, коли проекції вектору збурюючого моменту сил різного порядку порівняно з відновлюючим моментом. Досліджена еволюція обертань тіла, близьких до регулярної прецесії, під дією сталого відновлюючого і збурюючого моменту сил, що повільно змінюються за часом. Вивчалася асимптотична поведінка рухів вовчка Лагранжа, близьких до регулярних прецесій, під дією малого збурюючого моменту [9, 10]. Вплив дисипативного та сталого моментів на стійкість рівномірного обертання вовчка Лагранжа з осесиметричною порожниною, що заповнена ідеальною рідиною, оцінено в [11].

Досліджуються збурені рухи відносно нерухомої точки динамічно симетричного твердого тіла під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які залежать від повільного часу $\tau = \varepsilon t$, де t – час, а ε – малий параметр, що характеризує величину збурень $(\varepsilon \ll 1)$. Рівняння руху мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)qr = \mu(\tau)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1;\\
&A\dot{q} + (A - C)pr = -\mu(\tau)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2;\\
&Cr = \varepsilon M_3,\ \ M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau),\ \ i = 1, 2, 3;\\
&\psi = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \ \tau = \varepsilon t;\\
&\theta = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\ \ \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Тут p, q, r – проекції вектора кутової швидкості на головні осі інерції тіла, $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$ – проекції вектора збурюючого моменту на ці ж осі; ψ, θ, φ – кути Ейлера; A – екваторіальний, а C – осьовий момент інерції тіла. Передбачається, що на тіло діє відновлюючий момент $\mu = \mu(\tau)$, який повільно змінюється за часом і є диференційованою функцією. Рівняння (1) описують рух твердого тіла у випадку Лагранжа, якщо $\varepsilon = 0$ та відновлюючий момент сталий.

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв’язків системи (1) при значеннях малого параметра ε, відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу, за допомогою методу усереднення [12].

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-18-26

Для розв’язання задачі використовується методика усереднення, яка розроблена в [1, 2]. Дана методика використовується для усереднення системи (1) за фазою кута нутації θ уздовж траєкторії зміни $\theta(t)$ під час при руху тіла під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які залежать від повільного часу.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для незбуреної системи (1) коли $\varepsilon = 0$ першими інтегралами є величини [1,13]:

$$\begin{gathered} G_z = A\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + Cr\cos\theta = c_1; \\ H = \frac{1}{2}\left[A(p^2+q^2) + Cr^2\right] + \mu\cos\theta = c_2, \quad r = c_3, \end{gathered} \tag{2}$$

де G_z – проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль Oz, H – повна енергія тіла, r – проекція вектора кутової швидкості на вісь динамічної симетрії, c_i, $i = 1,2,3$ – довільні сталі, $c_2 \geq -\mu$.

Також відомий вираз для кута нутації θ при незбуреному русі Лагранжа як функції часу [1, 13], через u_1, u_2, u_3 – позначено дійсні корені кубічного багаточлена

$$\begin{gathered} Q(u) = A^{-2}\left[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1-u^2)A - (G_z - Cru)^2\right], \\ u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad \alpha = \left[\mu(u_3 - u_1)/(2A)\right]^{1/2}, \\ \mathrm{sn}(\alpha t + \beta) = \sin\mathrm{am}(\alpha t + \beta, k), \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \end{gathered} \tag{3}$$

де u – періодична функція за часом t з періодом $K(k)/\alpha$; sn і am – еліптичний синус і амплітуда [13], k – модуль еліптичних функцій.

Використовуючи співвідношення (2) як формули перетворення від змінних $(p,q,r,\psi,\theta,\varphi)$ до змінних $(G_z,H,r,\psi,\theta,\varphi)$ приведемо перші три рівняння (1) до вигляду:

$$\begin{gathered} \dot{G}_z = \varepsilon F_1, \ F_1 = (M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\sin\theta + M_3\cos\theta; \\ H = \varepsilon F_2, \ F_2 = (M_1 p + M_2 q + M_3 r) + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau}\cos\theta; \\ \dot{r} = \varepsilon F_3, \ F_3 = C^{-1}M_3, \ M_i = M_i(G_z,H,r,\psi,\theta,\varphi,\tau), \ i = 1,2,3. \end{gathered} \tag{4}$$

Праві частини (4) містять повільні змінні G_z, H, r та швидкі змінні ψ,θ,φ, які періодичні по t, що може сприяти появі резонансу. Для подолання цього та можливості усереднення будемо вважати виконаними необхідні і достатні умови, що накладаються на моменти прикладених сил:

$$\begin{gathered} M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi = M_1^*, \ M_1 p + M_2 q = M_2^*, \ M_3 = M_3^*; \\ M_i^* = M_i^*(G_z,H,r,\tau,\theta), \ i = 1,2,3. \end{gathered}, \tag{5}$$

Тоді праві частини рівнянь (4) можуть бути представлені як функції від повільних змінних G_z, H, r, τ і однієї швидкої змінної – кута нутації θ: $F_i = F_i(G_z,H,r,\tau,\theta)$ $i = 1,2,3$ періодичні за фазою кута θ з періодом 2π.

Передбачається проводити дослідження збуреного руху у повільних змінних u_i, $i = 1,2,3$, які можна виразити через перші інтеграли, таким чином:

$$u_1+u_2+u_3=\frac{H}{\mu}-\frac{Cr^2}{2\mu}+\frac{C^2r^2}{2A\mu},\qquad u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=\frac{G_zCr}{A\mu}-1;$$
$$u_1u_2u_3=-\frac{H}{\mu}+\frac{Cr^2}{2\mu}+\frac{G_z^2}{2A\mu},\qquad -1\le u_1\le u_2\le 1<u_3<+\infty.$$

Після ряду перетворень шукана система рівнянь для повільних змінних u_i, $i=1,2,3$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_i}{dt}=\varepsilon V_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\theta),\ \ u_i(0)=u_i^0,\ \ i=1,2,3;\\
&V_i=V_{i1}F_1^*+V_{i2}F_2^*+V_{i3}F_3^*+V_{i4}\mu',\ \ V_{ij}=V_{ij}(u_1,u_2,u_3,\tau)\ \ j=1,2,3;\\
&V_{11}=\frac{G_z-Cru_1}{A\Delta},\ \ V_{12}=\frac{u_1^2-1}{\Delta},\ \ \mu=\mu(\tau),\ \ \mu'=\frac{d\mu(\tau)}{d\tau};\\
&V_{13}=\frac{C}{A\Delta}\left[Ar(1-u_1^2)-u_1(G_z-Cru_1)\right];\\
&V_{14}=\frac{\left[A(u_1^2-1)(Cr^2-2H)-(G_z-Cru)^2\right]}{2A\mu\Delta},\ \ \Delta=\mu(u_1-u_2)(u_1-u_3),
\end{aligned}\tag{6}$$

де функції V_{2j},V_{2j}, $j=1,2,3$ одержуємо з відповідних виразів (6) для того ж значення j шляхом циклічної перестановки індексів i у величини u_i. Функції F_i^* є підстановкою в F_i з (4) виразів

$$\begin{aligned}
&G_z=\chi\delta(u_1+u_2+u_3+u_1u_2u_3+R)^{1/2},\quad r=\chi C^{-1}(u_1+u_2+u_3+u_1u_2u_3-R)^{1/2},\\
&H=\frac{1}{2}\mu\left[(u_1+u_2+u_3)(1+AC^{-1})+(R-u_1u_2u_3)(1-AC^{-1})\right],\\
&R=\mathrm{sign}(G_z^2-C^2r^2)\left[(1-u_1^2)(1-u_2^2)(u_3^2-1)\right]^{1/2},\\
&\chi=(A\mu)^{1/2}\,\mathrm{sign}\,r,\quad \delta=\mathrm{sign}(1+u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3),
\end{aligned}\tag{7}$$

де величини χ і R в початковий момент визначаються за початковими умовами для G_z і r. Якщо в процесі руху одна або обидві величини $G_z^2-C^2r^2$ і r проходять через нуль, то можлива зміна знаків χ і R, для визначення яких можна скористатися початковою системою (4).

Процедура усереднення рівнянь (6) для повільних змінних u_i першого наближення полягає в наступному. Підставимо в праві частини системи (6) швидку змінну θ з (3) для незбуреного руху. В цьому випадку праві частини системи (6) будуть періодичними функціями t з періодом $2K(k)/\alpha$, де k і α визначаються за допомогою співвідношень (3). Після усереднення правих частин отриманої системи за фазою кута нутації одержуємо у повільному часі $\tau=\varepsilon t$ усереднену систему першого наближення:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_i}{d\tau}=U_i(u_1,u_2,u_3,\tau),\ \ u_i(0)=u_i^0,\ \ i=1,2,3;\\
&U_i(u_1,u_2,u_3,\tau)=\frac{\alpha}{2K(k)}\int_0^{2K/\alpha}V_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\theta(t))dt.
\end{aligned}\tag{8}$$

Після дослідження і розв'язання системи (8) для u_i повільні змінні G_z,H,r відновлюються за формулами (7). Повільні змінні u_i і G_z,H,r визначаються з похибкою порядку ε.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-18-26

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо випадок, коли збурені моменти мають вигляд:

$$M_1 = pf\,,\ M_2 = qf\,,\ M_3 = M_3^*,\ \ f = f(G_z, H, r, \theta, \tau)\,.$$

Ці умови є достатніми для забезпечення правильності співвідношень (5).

Дослідимо збурений рух, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Як приклад можна розглянути зовнішнє середовище, що повільно змінює властивості в'язкості внаслідок зміни щільності, температури, складу середовища. Збурюючі моменти $\varepsilon M_i,\ i = 1,2,3$ мають вигляд [14]:

$$M_1 = -a(\tau)p,\ M_2 = -a(\tau)q,\ M_3 = -b(\tau)r,\ a(\tau),\ b(\tau) > 0,\ \ \tau = \varepsilon t\,, \tag{9}$$

де $a(\tau),\ b(\tau)$ – функції, які інтегруються та залежать від властивостей середовища і форми тіла. Система (4) записується таким чином:

$$\begin{aligned}
&\dot G_z = -\varepsilon\left[\left(a(\tau)p\sin\varphi + a(\tau)q\cos\varphi\right)\sin\theta + b(\tau)r\cos\theta\right];\\
&\dot H = -\varepsilon\left[a(\tau)(p^2+q^2) + b(\tau)r^2 + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau}\cos\theta\right];\\
&\dot r = -\varepsilon C^{-1} b(\tau) r\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Інтегруючи третє рівняння (3.2), одержуємо (r_0 – довільне початкове значення осьової швидкості обертання)

$$r = r_0 \exp(-\varepsilon C^{-1}\int_0^t b(\varepsilon t)dt)\,. \tag{11}$$

Розглянемо випадок, коли $a(\tau),\ b(\tau),\ \mu(\tau)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&a(\tau) = a_0 + a_1\tau,\ b(\tau) = b_0 + b_1\tau\,,\ \mu(\tau) = \mu_0 + \mu_1\,\mathrm{Exp}(\tau);\\
&a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1,\ \mu_0 - \mathrm{const},\ \ a_0 > 0,\ b_0 > 0,\ \mu_0 > 0\ \ a_1 \ge 0,\ b_1 \ge 0, \mu_1 \ge 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Перейдемо до нових повільних змінних і отримаємо усереднену систему (8) з урахуванням збурюючих моментів (9) у повільному часі $\tau = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{d\tau} = \frac{-1}{\Delta}\Big\{&a(\tau)A^{-1}\left[A^{-1}(G_z - C\,r\,u_1)(G_z - Crv) + (u_1^2-1)(2H - Cr^2 - 2\mu_0 v)\right] + \qquad (123)\\
&+ b(\tau)rA^{-1}(G_z - C\,r\,u_1)(v-u_1) - \mu'\left[(u_1^2-1)\left(v + \frac{1}{2\mu}(Cr^2-2H)\right) - \frac{1}{2A\mu}(G_z - Cru_1)^2\right]\Big\};\\
v = u_3 - &(u_3-u_1)E(k)/K(k)\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Символ (123) означає, що рівняння для $u_2,\ u_3$ отримаємо з (13) циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3. Але при цій перестановці вираз для v, де $K(k),\ E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, слід залишити незмінними в усіх трьох рівняннях. Замість $G_z,\ H,\ r,\ k$ підставляємо їх вирази з (1.3), (2.5).

Усереднена система (13) проінтегрована чисельно для $\tau \ge 0$ при різних початкових умовах та параметрах задачі. Передбачається, що в початковий момент $t = 0$ вовчок Лагранжа отримав кутову швидкість обертання навколо осі динамічної симетрії, що дорівнює $r_0 = 1{,}73$, і відхилення на кут θ_0 від вертикалі, а також

$A = 1{,}5,\ C = 1,\ \mu_0 = 0{,}5,\ a_0 = 0{,}125,\ b_0 = 0{,}1,\ \mu_1 = 0{,}01,\ a_1 = b_1 = 1,\ u_2^0 = \cos\theta^0$. В цьому випадку інші початкові дані мають вигляд (Таблиця 1.):

Таблиця 1

Початкові значення змінних u_1, u_2, u_3 та кута натуації θ

Випадок	u_1^0	u_2^0	u_3^0	θ^0
1	-0,4	0,866	3,25	30º
2	–0,992	–0,105	4,15	96º

Використовуючи значення u_i, що одержали в результаті чисельного інтегрування, знаходимо $G_z,\ H,\ r$ за формулою (7). На рис. 1-2 зображені графіки функцій $G_z,\ H,\ r$ $u_i\ (i = 1, 2, 3)$.

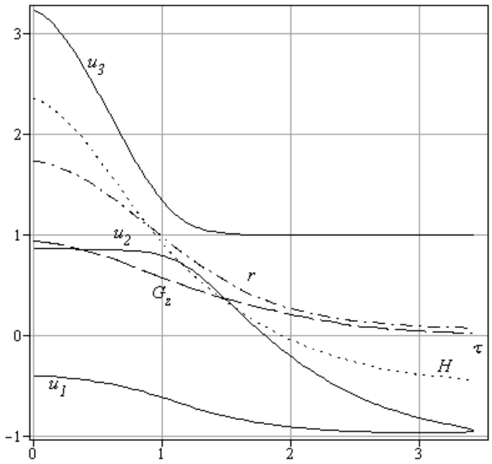

Рис. 1. Випадок 1

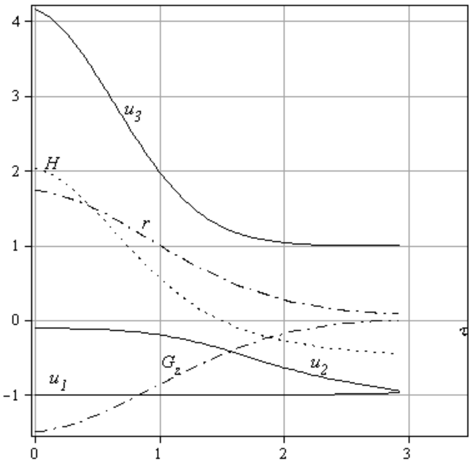

Рис. 2. Випадок 2

Повна енергія тіла і кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії спадають. Проекція вектору кінетичного моменту на вертикаль наближається до нуля. Величина u_3 асимптотично прагне до одиниці. Величини u_1 і u_2 монотонно спадають і прагнуть до -1. Згідно першої рівності (3), при $\theta \to \pi$ маємо $\cos\theta \to -1$. Повна енергія H монотонно спадає, асимптотично наближаючись до значення $H = -0{,}5$.

5 ВИСНОВКИ

При порівнянні одержаних результатів з результатами [1, 2], де μ і M_i не залежать від повільного часу τ та з [8], де тільки M_i залежать від повільного часу, можна відмітити їх механічний зміст. Залежність відновлюючого і збурюючого моментів від повільного часу призводить до появи в усередненій системі рівнянь першого наближення для повільних змінних функцій $a(\tau)$, $b(\tau)$ і $\mu(\tau)$, що залежать від повільного часу, які при чисельному інтегруванні згладжують поведінку $u_i\ (i = 1, 2, 3)$, G_z, H. Під дією дисипативного моменту (9) тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги швидше, ніж у розглянутих випадках [1, 2, 8], що є наслідком завдання коефіцієнтів (12).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-18-26

Коректність розрахунку підтверджується тим, що отримані за чисельними даними та формулами (7) значення r практично співпадають з точним розв'язком (11).

Таким чином, досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла відносно нерухомої точки з урахуванням нестаціонарних відновлюючого і збурюючого моментів.

Література

1. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. – Springer, 2017. – 260 p. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
2. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – 43, Вып.5.– С. 771–778.
3. Кузмак Г. Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени / Г. Е. Кузмак // Известия АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – №4. – С.65–78.
4. Simpson H. C. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction / H. C. Simpson, M. D. Gunzburger // J. Appl. Math. Phys. – 1986. – V. 37, №6. – P. 867–894.
5. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №5. – С. 3–10.
6. Акуленко Л. Д. Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 77–84.
7. Акуленко Л. Д. Вращения твердого тела под действием нестационарных восстанавливающих и возмущающего моментов / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – №2. – С. 3–12.
8. Акуленко Л. Д. Эволюция движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, под действием нестационарного момента сил / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т.81, Вып. 2. – С.115–122.
9. Сазонов В. В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа / В. В. Сазонов, В. В. Сидоренко // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т.54, Вып. 6. – С. 951–957.
10. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V. V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – V.4. – P. 35–57.
11. Кононов Ю. Н. Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью / Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселева // Вісник Харківського нац. універс. ім. В. Н. Каразіна. Сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2009. – №850. – С. 52–56.
12. Волосов В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ. – 1971. – 507с.
13. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов – М.-Л.: Гостехиздат. – 1946. – 655с.
14. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В. Н. Кошляков – М.: Наука. – 1985. –288с.

References

1. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
2. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. J. Appl. Math. Mech., 43 (5), 829–837.
3. Kuzmak, G. E. (1961). Dvizheniye osesimmetrichnogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoy tochki pod vozdeystviyem momentov medlenno izmenyayushchehtsya vo vremeni. Izvestiya AN SSSR OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye, 4, 65–78.
4. Simpson, H. C. Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. J. Appl. Math. and Phys., 37 (6), 867–894.

5. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession. Mechanics of Solids, 21 (5), 1–8.
6. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2002). Vozmushchennyye vrashcheniya tverdogo tela pod deystviyem nestatsionarnogo vosstanavlivayushchego momenta. Mekh. Tverd. Tela, 32, 77–84.
7. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2003). Rotations of a rigid body under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Mechanics of Solids, 38 (2), 1–7.
8. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. J. Appl. Math. Mech., 81 (2), 79–84. doi.org/10.1016/j/iappmathmech:2017.08.001
9. Sazonov, V. V., Sidorenko, V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. J. Appl. Math. Mech., 54 (6), 781–787.
10. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. J. Nonlinear Sci,. 4, 35–57.
11. Kononov, Y. N. Kiseleva, N. V. (2009). Vliyaniye dissipativnogo i postoyannogo momentov na ustoychivost' k ravnomernomu vrashcheniyu v soprotivlyayemoy srede. Vísnik Kharkívs'kogo nats. univer. ím. V.N. Karazína. Ser. „Matematika, prikladnaya matematika i mekhaníka", 850, 52–56.
12. Volosov, V. M., Morgunov, B. I. (1971). Metod osrednenia v teorii nelineynykh kolebatelnykh system. M.: Izdatelstvo MGU, 507.
13. Suslov, G. K. (1946). Teoreticheskaya mekhanika. M.-L.: Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 655.
14. Koshlyakov, V. N. (1985). Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody. M.: Nauka, 288.

Акуленко Леонід Денисович
Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
l.akulenko@bk.ru
ORCID: 0000-0003-3209-1472
Лещенко Дмитро Давидович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Козаченко Тетяна Олександрівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:
Акуленко Л. Д. Еволюція обертальних рухів твердого тіла, близьких до випадку лагранжа, під дією нестаціонарного моменту / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Т. О. Козаченко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 18–26.

For references:
Akulenko, L., Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2019). Evolution of rotational motions of a rigid body close to the lagrange case under the action of an unsteady torque of forces. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 18 – 26.