УДК 624.012 DOI: 10.31650/2415-377X-2019-77-76-83

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИБРОБЕТОНА НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Неутов С.Ф., к.т.н., доцент,
ORCID: 0000-0002-0132-124X
Сурьянинов Н.Г., д.т.н., профессор,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Аннотация. В работе рассматривается построение математической модели фибробетона в рамках структурного подхода к исследованию его свойств по аналогии с железобетоном, что позволяет на основе свойств исходных компонентов определять необходимые прочностные и деформативные характеристики. Отмечено, что одной из основных задач при построении математической модели фибробетона является определение его эффективных свойств, что, в свою очередь, предполагает процедуру выбора и моделирования представительного объема материала. Для построения математической модели используются уравнения линейной теории упругости. Но, поскольку рассматриваемая среда является гетерогенной, учитывается принцип Эшелби, который позволяет вычислить энергию деформирования системы, содержащей включения. С использованием формул Эшелби определены эффективные жесткости фибробетона, под которыми подразумеваются средние величины жесткости, учитывающие свойства всех фаз фибробетона и их взаимодействие.

Получено выражение, которое позволяет описать эффективные характеристики фибробетона при малом объемном содержании фибры. Приведенные в работе зависимости можно применять не только для стальных фибровых волокон, но и для любых других, а конкретизация выражений для эффективных упругих характеристик будет зависеть исключительно от геометрической формы фибрового волокна и вида его деформации.

Ключевые слова: фибробетон, математическая модель, эффективная жесткость, принцип Эшелби, гетерогенная среда, теорема Остроградского-Гаусса.

Введение. Поскольку фибробетон является композиционным материалом, при исследовании его физико-механических свойств применяются два подхода, которые обычно используют при работе с композитами – феноменологический и структурный. В первом случае материал рассматривают как некую изотропную систему, к которой применимы методы механики деформируемого твердого тела. При этом, характеристики материала определяются на основе лабораторных исследований и испытаний с применением методов теории планирования эксперимента и математической статистики.

Во втором случае используется структурный анализ, что предполагает выражение механических характеристик материала через аналогичные показатели его компонентов, коэффициент фибрового армирования, тип и геометрические размеры фибры и др.

В нашей стране наибольшее распространение имеет структурный подход к исследованию свойств фибробетона по аналогии с железобетоном, что позволяет на основе свойств исходных компонентов определять необходимые прочностные и деформативные характеристики. Такой подход сложен, зависит от множества факторов, но, при этом, является удобным при решении задач оптимального проектирования фибробетонных конструкций.

Феноменологический подход получил широкое распространение в Европе и США. Мировой опыт проектирования сталефибробетонных конструкций показывает, что применение феноменологического подхода при определении физико-механических свойств фибробетона позволяет наиболее эффективно использовать материал и проектировать рациональные фибробетонные конструкции.

Анализ последних исследований. Известно, что бетон рассматривается в виде гетерогенной среды, которая имеет неоднородную и неупорядоченную структуру, содержащую зерна крупного и мелкого заполнителя. Сплошность этой среды нарушена наличием пор и усадочных трещин. В бетоне выделяют четыре элемента структуры: макро-, мезо-, микро- и субмикроструктуру [1].

Влиянию структуры бетона на процесс образования и развития трещин посвящено большое количество публикаций. Знаковыми здесь являются работы Б.Г. Скрамтаева [2], О.Я. Берга [3, 4], А.А. Гвоздева [5-7].

Фибробетон характеризуется хаотическим армированием и, как утверждают многочисленные исследователи [8-12], обладает более высокими физико-механическими характеристиками по сравнению с обычным бетоном, что можно объяснить достаточно высокой суммарной протяженностью границы раздела фибра-бетон, сковыванием микротрещин, что существенно изменяет общую картину трещинообразования, и некоторыми менее значимыми свойствами фибробетона, как композитного материала.

Анализ характера упрочнения фибробетона на уровне микроструктуры требует построения новой математической модели, отличной от тех, которые применяются при моделировании бетона.

Целью данной работы является построение математической модели фибробетона на основе определения его эффективных жесткостных характеристик.

Материалы и методика исследований. В качестве исследуемого материала в работе рассматривается фибробетон, изготовленный на основе стальной фибры с загнутыми концами. Для достижения обозначенной цели работы используются методы математического анализа, матричной алгебры, теории упругости.

Результаты исследования. Одной из основных задач при построении математической модели фибробетона является определение его эффективных свойств, что, в свою очередь, предполагает процедуру выбора и моделирования представительного объема материала.

Для построения математической модели будем использовать уравнения линейной теории упругости. Запишем эти соотношения для общего случая:

– уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \tag{1}$$

– соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \tag{2}$$

– уравнения закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{3}$$

где C_{ijkl} – тензор жесткостей.

Уравнения (3) записаны для наиболее общего случая, и здесь C_{ijkl} имеет 81 компоненту, но для реальных материалов их число существенно снижается [13].

Для изотропного тела остаются только две независимые компоненты, а выражение (3) принимает вид.

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Соотношения между напряжениями и деформации, при этом, записываются так [13]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (5)$$

где λ и μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Но, поскольку рассматриваемая среда является гетерогенной, учтем известный принцип Эшелби [14], который позволяет вычислить энергию деформирования системы, содержащей включения. Формула Эшелби позволяет определить эту энергию путем перехода от интегрирования по объему к интегрированию по некоторой поверхности. Рассмотрим какой-либо элементарный объем бетона, внутри которого есть одно фибровое волокно (рис. 1).

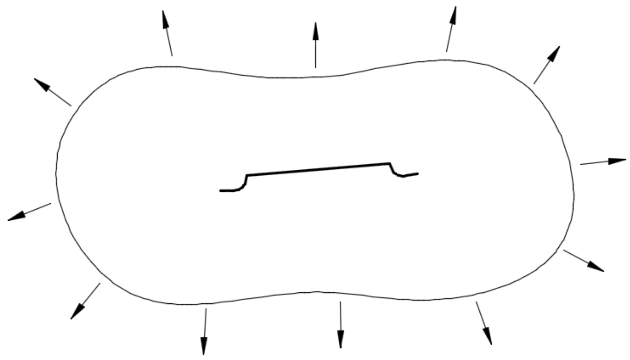

Рис. 1. Элементарный объем фибробетона

Будем считать, что условия на поверхности заданы в напряжениях.

Обозначим напряжения, деформации и перемещения, соответствующие рис. 1, через σ_{ij}, ε_{ij}, и u_i, а эти же величины для случая, когда внутри элементарного объема нет фибрового волокна – через σ_{ij}^0, ε_{ij}^0 и u_i^0.

Энергия деформирования для каждого из этих случаев запишется в виде:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV; \qquad (6)$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}^0 dV; \qquad (7)$$

где V – элементарный объем.

Вычитая (7) из (6), получим:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}^0\right) dV. \qquad (8)$$

Применяя к (8) теорему Остроградского-Гаусса и учитывая, что уравнения равновесия для двух рассматриваемых случаев имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0,$$

получим:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\int_S \left(\sigma_i u_i - \sigma_i^0 u_i^0\right) dS, \qquad (9)$$

где S – поверхность тела.

Поскольку граничные условия – одинаковые, на поверхности будем иметь:

$$\sigma_i = \sigma_i^0, \qquad (10)$$

и тогда:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\int_S \sigma_i^0 \left(u_i - u_i^0\right) dS. \qquad (11)$$

Опуская промежуточные преобразования формулы (11), которые достаточно громоздкие, но подробно описаны в [15] и во многих учебниках по теории упругости, приведем окончательный вид формулы Эшелби, когда граничные условия заданы в напряжениях:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\int_{S_1} \left(\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0\right) dS. \qquad (12)$$

Если же граничные условия заданы в перемещениях, то формула Эшелби записывается так:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\int_{S_1} \left(\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i\right) dS. \qquad (13)$$

В формулах (12) и (13) S_1 – поверхность фибрового волокна в элементарном объеме.

Используя формулы Эшелби, перейдем к определению эффективных жесткостей фибробетона, под которыми будем понимать средние величины жесткости, которые учитывают свойства всех фаз фибробетона и их взаимодействие.

Будем рассматривать фибробетон как гетерогенную структуру с четко выраженными двумя фазами. Первая фаза представляет собой непрерывно распределенный по объему бетон, а вторая фаза – дискретные включения в виде волокон фибры. При этом каждую из фаз будем считать однородной и изотропной.

Считая, что фибровые волокна распределены по объему равномерно и зная процент фибрового армирования, можно определить условно среднее расстояние между центрами тяжести (или, что то же самое, между геометрическими центрами) отдельных фибр. Это расстояние является характерным размером неоднородности фибробетона.

Размер длины осреднения (обозначим его через δ), в пределах которого можно осреднить свойства фибробетона, используя статистический подход, значительно больше, чем размер неоднородности, но, при этом, гораздо меньше характерных размеров фибробетонной конструкции. Это означает, что существует некий промежуточный размер, в пределах которого осреднение характеристик фибробетона является обоснованным. В теории композитов [14] изложенный подход называется условием эффективной гомогенности, или эквивалентной гомогенности.

Используя процедуру осреднения, можно описать эффективные свойства фибробетона, как эквивалентной гомогенной среды, через свойства фибры и бетона и их геометрические параметры, а затем использовать эти свойства в расчетах фибробетонных конструкций.

Рассмотрим элементарный объем фибробетона, размеры которого соизмеримы с масштабом осреднения δ (рис. 2).

Средние значения напряжений и деформаций, возникающих при действии внешней нагрузки, будут:

$$\sigma_{ij}^{m} = \int_{V} \sigma_{ij}\left(x_i\right) dV; \tag{14}$$

$$\varepsilon_{ij}^{m} = \int_{V} \varepsilon_{ij}\left(x_i\right) dV; \tag{15}$$

Эффективные жесткости C_{ijkl} определяются соотношением:

$$\sigma_{ij}^{m} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{m}. \tag{16}$$

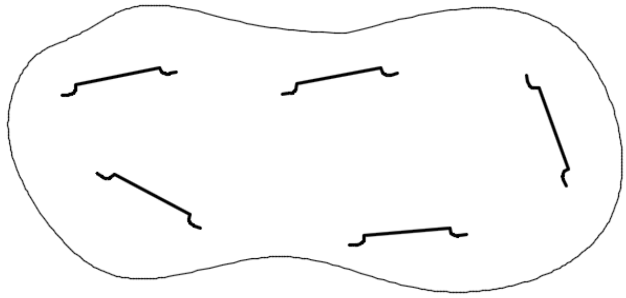

Рис. 2. К определению эффективных жесткостей

Поскольку, как уже отмечалось выше, фибробетон рассматривается нами как гетерогенная структура, состоящая из двух изотропных фаз, соотношение между напряжениями и деформациями можно записать для фибры в виде:

$$\sigma_{ij}^{f} = \lambda_f \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_f \varepsilon_{ij}, \tag{17}$$

а для бетона:

$$\sigma_{ij}^{b} = \lambda_b \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij}, \tag{18}$$

где λ_f, λ_b, μ_f, μ_b – параметры Ламе.

Теперь (14) можно переписать так:

$$\sigma_{ij}^{m} = \frac{1}{V}\left(\int_{V_b} \sigma_{ij} dV + \sum_{n=1}^{N} \int_{V_f} \sigma_{ij} dV \right), \tag{19}$$

где N – количество фибр в объеме V;

$V_b = V - \sum_{n=1}^{N} V_f$ – объем бетона;

V_f – суммарный объем N фибр.

А если теперь учесть (18), то будем иметь:

$$\sigma_{ij}^{m} = \frac{1}{V}\left[\int_{V} \left(\lambda_b \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij} \right) dV - \sum_{n=1}^{N} \int_{V_f} \left(\lambda_b \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_b \varepsilon_{ij} \right) dV + \sum_{n=1}^{N} \int_{V} \sigma_{ij} dV \right]. \tag{20}$$

Учитывая (16) и интегрируя первое слагаемое в (20), получим:

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{m} = \lambda_b \delta_{ij}\varepsilon_{kk}^{m} + 2\mu_b \varepsilon_{ij}^{m} + \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \int_{V_f} \left(\sigma_{ij} - \lambda_b \delta_{ij}\varepsilon_{kk} - 2\mu_b \varepsilon_{ij} \right) dV. \tag{21}$$

Выводы. Таким образом, получено выражение, которое позволяет описать эффективные характеристики фибробетона при малом объемном содержании фибры. А, поскольку в наших предыдущих работах и в исследованиях других авторов показано, что оптимальное содержание фибры по объему конструкции в подавляющем большинстве случаев составляет (1-1,5)% (реже – 2%, что тоже можно отнести к малому объемному содержанию), предложенный подход к описанию эффективных характеристик фибробетона имеет очень широкую область применения.

Полученные в работе зависимости можно применять не только для стальных фибровых волокон, но и для любых других (полимерных, стеклянных, и т.д.), а конкретизация выражений для эффективных упругих характеристик будет зависеть исключительно от геометрической формы фибрового волокна и вида его деформации.

Применительно к фибре с загнутыми концами, используемой в наших исследованиях, представляется возможным эту форму считать цилиндрической, что и определяет направление дальнейших исследований.

Литература

1. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. М.: 1982. 196 с.

2. Скрамтаев Б.Г. Исследование прочности бетона и пластичности бетонной смеси. М.: ЦНИИПС. 1936. 384 с.

3. Берг О.Я. Физические основы прочности бетона и железобетона. М.: 1961. 490 с.

4. Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Писанко Г.Н. Высокопрочный бетон. М.: Стройиздат, 1971. 490 с.

5. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: 1949. 375 с.

6. Гвоздев А.А., Яшин А.В., Петрова К.В. и др. Прочность, структурные изменения и деформации бетона. М.: 1978. 197 с.

7. Гвоздев А.А., Дмитриев С.А., Гуща Ю.П. и др. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций. М.: 1978. 207 с.

8. Окольникова Г.Э., Белов А.П., Слинькова Е.В. Анализ свойств различных видов фибробетонов / Системные технологии. 2018. № 1 (26). С. 206-210.

9. Abbas A., S. Syed Mohsin and Cotsovos D. Steel-fibre-reinforced concrete beams under cyclic loads / Conference Paper BEFIB 2012, January 2012. pp. 147-159.

10. Korneeva I., Neutov S., Surianinov M. Experimental studies of fiber concrete creep / Matek Web of Conferences 116, 02021. Transbud, 2017.

11. Sarita R. Khot, Swati S. Mane. An experimental study on shear behavior of steel fiber reinforced concrete beam / International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET), Volume: 02, Issue: 06, 2015, pp. 829-834.

12. S. Neutov., Sydorchuk M., Surianinov M. Experimental Studies of Reinforced Concrete and Fiber-Reinforced Concrete Beams with Short-Term and Long-Term Loads / Materials Science Forum 6th International Conference «Actual Problems of Engineering Mechanics» (APEM 2019), 2019. Vol. 968. pp. 227-233.

13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1977. 416 с.

14. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов / Пер. с англ. А. И. Бейля, Н. П. Жмудя. М.: Мир, 1982. 334 с.

15. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: Progress in Solid State Physics, v. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). New York: Academic, 1956, p. 79. [Перевод: Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963, 247 с.]

References

[1] Yu.V. Zaytsev, *Modelirovanie deformatsiy i prochnosti betona metodami mehaniki razrusheniya*. M.: 1982.

[2] B.G. Skramtaev, *Issledovanie prochnosti betona i plastichnosti betonnoy smesi*. M.: TsNIIPS, 1936.

[3] O.Ya. Berg, *Fizicheskie osnovyi prochnosti betona i zhelezobetona*. M.: 1961.

[4] O.Ya. Berg, E.H. Scherbakov, G.N. Pisanko, *Vyisokoprochnyiy beton*. M.: Stroyizdat, 1971.

[5] A.A. Gvozdev, *Raschet nesuschey sposobnosti konstruktsiy po metodu predelnogo ravnovesiya*. M.: 1949.
[6] A.A. Gvozdev, A.B. Yashin, K.V. Petrova i dr., *Prochnost, strukturnyie izmeneniya i deformatsii betona*. M.: 1978.
[7] A.A. Gvozdev, S.A. Dmitriev, Yu.P. Guscha i dr., *Novoe v proektirovanii betonnyih i zhelezobetonnyih konstruktsiy*. M.: 1978.
[8] G.E. Okolnikova, A.P. Belov, E.V. Slinkova, "Analiz svoystv razlichnyih vidov fibrobetonov", *Sistemnyie tehnologii*, no. 1 (26), pp. 206-210, 2018.
[9] A. Abbas , S. Syed Mohsin and D. Cotsovos, "Steel- fibre-reinforced concrete beams under cyclic loads", *Conference Paper BEFIB2012*, January 2012.
[10] Irina Korneeva, Stepan Neutov, Mykola Surianinov, "Experimental studies of fiber concrete creep", *Matek Web of Conferences 116*, 02021. Transbud, 2017.
[11] Sarita R. Khot, Swati S. Mane, "An Experimental Study On Shear Behavior Of Steel Fiber Reinforced Concrete Beam", *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, Volume: 02, Issue: 06, pp. 829-834, 2015.
[12] S. Neutov, M. Sydorchuk, M. Surianinov, "Experimental Studies of Reinforced Concrete and Fiber-Reinforced Concrete Beams with Short-Term and Long-Term Loads", *Materials Science Forum 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics" (APEM 2019)*, Vol.968, pp. 227-233, 2019.
[13] S.G. Lehnitskiy, *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. Izd. 2-e, pererab. i dop. M.: Nauka, 1977.
[14] R.M. Kristensen, *Vvedenie v mehaniku kompozitov*. Per. s angl. A. I. Beylya, N. P. Zhmudya. M.: Mir, 1982.
[15] J. D. Eshelby, *The continuum theory of lattice defects*. In: Progress in Solid State Physics, v. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). New York: Academic, 1956, p. 79. [Perevod: Eshelbi Dzh. Kontinualnaya teoriya dislokatsiy. M.: IL, 1963, 247 p.]

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФІБРОБЕТОНУ НА ОСНОВІ ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖОРСТКОСТІ

Неутов С.П., к.т.н., доцент,
ORCID: 0000-0002-0132-124X
Сур'янінов М.Г., д.т.н., професор,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація. У роботі розглядається побудова математичної моделі фібробетону в рамках структурного підходу до дослідження його властивостей за аналогією з залізобетоном, що дозволяє на основі властивостей вихідних компонентів визначати необхідні міцністні і деформативні характеристики. Відзначено, що одним з основних завдань при побудові математичної моделі фібробетону є визначення його ефективних властивостей, що, в свою чергу, передбачає процедуру вибору і моделювання представницького об'єму матеріалу. Для побудови математичної моделі використовуються рівняння лінійної теорії пружності. Але, оскільки розглянуте середовище є гетерогенним, враховується принцип Ешелбі, який дозволяє обчислити енергію деформування системи, що містить включення. Формула Ешелбі дозволяє визначити цю енергію шляхом переходу від інтегрування за об'ємом до інтегрування по деякій поверхні. З використанням формул Ешелбі визначені ефективні жорсткості фібробетону, під якими маються на увазі середні величини жорсткості, що враховують властивості всіх фаз фібробетону та їх взаємодію. При цьому фібробетон розглядається як гетерогенна структура з чітко вираженими двома фазами. Перша фаза являє собою безперервно розподілений за об'ємом бетон, а друга фаза – дискретні включення у вигляді волокон фібри. Кожна з фаз вважається однорідною і ізотропною.

Отримано вираз, яке дозволяє описати ефективні характеристики фібробетону при малому об'ємному вмісті фібри. А, оскільки оптимальний вміст фібри за об’ємом конструкції в переважній більшості випадків становить 1-1,5%, запропонований підхід має дуже широку сферу застосування. Отримані в роботі залежності можна застосовувати не тільки для сталевих фібрових волокон, а й для будь-яких інших, а конкретизація виразів для ефективних пружних характеристик буде залежати виключно від геометричної форми фібрового волокна і виду його деформації. Стосовно до фібри з загнутими кінцями, яка використовувалась в дослідженнях авторів, представляється можливим цю форму вважати циліндричною, що і визначає напрямок подальших досліджень.

Ключові слова: фібробетон, математична модель, ефективна жорсткість, принцип Ешелбі, гетерогенне середовище, теорема Остроградського-Гаусса.

MATHEMATICAL MODEL OF FIBER CONCRETE BASED ON EFFECTIVE RIGID CHARACTERISTICS

Neutov S.P., PhD., Assistant Professor,
ORCID: 0000-0002-0132-124X
Surianinov M.G., Doctor of Technical Sciences, Professor,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. The paper considers the construction of a mathematical model of fiber-reinforced concrete in the framework of a structural approach to the study of its properties by analogy with reinforced concrete, which allows us to determine the necessary strength and deformation characteristics based on the properties of the initial components. It is noted that one of the main tasks in constructing the mathematical model of fiber-reinforced concrete is to determine its effective properties, which, in turn, involves a procedure for selecting and modeling a representative volume of material. To build a mathematical model, the equations of the linear theory of elasticity are used. But, since the medium under consideration is heterogeneous, the Eshelby principle is taken into account, which allows us to calculate the deformation energy of a system containing inclusions. Eshelby's formula allows us to determine this energy by moving from integration over volume to integration over some surface. Using Eshelby's formulas, the effective stiffnesses of fiber-reinforced concrete are determined, which mean the average values of stiffness, taking into account the properties of all phases of fiber-reinforced concrete and their interaction. At the same time, fiber-reinforced concrete is considered as a heterogeneous structure with clearly defined two phases. The first phase is concrete continuously distributed throughout the volume, and the second phase is discrete inclusions in the form of fiber fibers. Each of the phases is considered homogeneous and isotropic.

An expression is obtained that allows us to describe the effective characteristics of fiber-reinforced concrete with a low volume content of fiber. And, since the optimal fiber content by volume of the structure in the vast majority of cases is (1-1.5) %, the proposed approach has a very wide scope. The dependences obtained in the work can be used not only for steel fiber fibers, but also for any others, and the specification of expressions for effective elastic characteristics will depend solely on the geometric shape of the fiber and the type of its deformation. In relation to the fiber with curved ends used in the studies of the authors, it seems possible to consider this form cylindrical, which determines the direction of further research.

Keywords: fiber concrete, mathematical model, effective stiffness, Eshelby principle, heterogeneous medium, Ostrogradsky-Gauss theorem.

Стаття надійшла 17.11.2019