ПРО КІЛЬКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗСУВОМ

Ковальова Г.В., к.ф.-м.н., доцент
(кафедра вищої математики)

В деяких задачах теорії пружності виникають матричні крайові задачі зі зсувом Карлемана. Розглянемо випадок, коли контур Г – одиничне коло, $\alpha(t)$ – зсув Карлемана, що змінює орієнтацію на Г. Розглянута система однорідних рівнянь

$$aP_+ + bWP_+ + cP_- + dWP = 0, \quad t\in\Gamma, \qquad (1)$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ – неперервні на Г матриці-функції порядку n, $P_\pm$ – проектори Рісса, $P_\pm=0{,}5(I\pm S)$, де S – оператор сингулярного інтегрування на Г, W – оператор зсуву, $(W\varphi)(t)= t^{-1}\alpha_-(t)\varphi(\alpha(t))$,

$$\alpha(t) = (t-\beta)(\bar{\beta}t-1)^{-1}, \alpha_-(t) = (t-\beta)\left(t\sqrt{1-|\beta|^2}\right)^{-1}.$$

Відомо [1, с. 72], що система рівнянь (1) порядку n зводиться до системи порядку $2n$ сингулярних інтегральних рівнянь без зсуву, яка є нормально розв’язною, якщо матриця $C=A^{-1}B$ є невиродженою на Г,

$$A(t)=\begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b[\alpha(t)] & c[\alpha(t)] \end{pmatrix}, \quad B(t)= eA[\alpha(t)]e, \quad e=\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут 0 – нульова матриця порядку n, E_n – одинична матриця порядку n.

Нехай матриця C дозволяє факторизацію

$$C = C_+\Lambda C_-, \quad \Lambda = \operatorname{diag}\left\{t^{k_1}, t^{k_2},\dots, t^{k_{2n}}\right\}, \quad k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_{2n},$$

матриці $C_+^{\pm1}(t)$ та $C_-^{\pm1}(t)$ неперервні на Г та допускають аналітичне продовження у внутрішність та зовнішність одиничного кола відповідно. Випадки,коли всі числа k_1; k_2; …; k_{2n} не додатні або не від’ємні, є відомими [1, с.72]. Нехай $k_1 \ge \dots \ge k_m > 0 \ge k_{m+1} \ge \dots \ge k_{2n}$. Тоді кількість нетривіальних розв’язків системи (1) залежить від діагональних елементів матриці

$$H = C_-(t)eC_+[\alpha(t)]\Lambda[\alpha_-(t)]$$

Можна довести, що діагональні елементи цієї матриці є сталими і дорівнюють ±1. Позначимо їх ε_1, ε_2,…, ε_{2n}. Тоді кількість нетривіальних розв’язків системи (1) обчислюється за формулою

$$0{,}5\left\{\sum_{j\le m;\,k_j\ \text{парні}} k_j + \sum_{j\le m;\,k_j\ \text{непарні}} (k_j - \varepsilon_j)\right\}, \text{ якщо } k_1 \ge \dots \ge k_m > 0 \ge k_{m+1} \ge \dots \ge k_{2n}.$$

Література

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.:Наука, 1977. – 448 с.