

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОСТЕЛИ**

¹**Крутий Ю.С.**, д.т.н., профессор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹**Сурьянинов Н.Г.**, д.т.н., профессор,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

¹**Сорока Н.Н.**, к.т.н., доцент,
soroka@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-9551-9475

¹**Карнаухова А.С.**, ассистент,
karnauhovaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-3542-4300

¹*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*
ул. Дидрихсона, 4, г. Одесса, 65029, Украина

Аннотация. Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния круглой пластины постоянной цилиндрической жесткости, которая лежит на переменном упругом основании и находится под действием непрерывно распределенной поперечной нагрузки.

Рассмотрены двенадцать вариантов расчета – шесть для стальной круглой пластины и еще шесть – для бетонной круглой плиты при двух условиях закрепления и трех различных законах изменения коэффициента постели. Для решения поставленной задачи используется метод конечных элементов, реализованный в ПК ЛИРА-САПР.

Отмечено, что в случае, когда коэффициент постели – переменная величина, зависящая от координаты, в которой определяется осадка основания, аналитический подход приводит к необходимости решения соответствующих дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Поэтому расчеты круглых и кольцевых пластин, лежащих на переменном упругом основании, посредством аналитических решений дифференциальных уравнений встречаются в научной периодике крайне редко и носят частный характер. Эффективный метод аналитического решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для ряда задач механики предложил один из авторов статьи, однако приложение метода к расчету круглой пластины на упругом основании с переменным коэффициентом постели требует верификации, поэтому здесь рассмотрены особенности конечно-элементного анализа такой пластины при разных граничных условиях и разных законах изменения коэффициента постели.

Во всех вариантах результаты полностью совпадают с известными результатами изгиба плит, не имеющих упругой основы и в случае, когда эта основа существует, а ее сопротивление является постоянным. Расхождение здесь очень незначительное – в третьей значащей цифре после запятой для прогиба при шарнирном закреплении и во второй – для моментов. При жестком защемлении прогибы и моменты также отличаются от соответствующих значений известных решений во второй значащей цифре после запятой.

Ключевые слова: круглая пластина, упругое основание, переменный коэффициент постели, модель Фусса-Винклера, метод конечных элементов, ЛИРА-САПР.

Введение. Исследование конструкций, лежащих на упругом основании, представляет собой одну из актуальных и наиболее сложных задач механики. Интерес к этим задачам все более возрастает, поскольку увеличивается этажность возводимых зданий и сооружений. В некоторых случаях конструкция фундамента может не полностью опираться на упругое основание. В частности, к этому приводит наличие подземных коммуникаций, размывов грунта в результате аварий трубопроводов, карстовых образований в зоне возведения объекта. Во всех этих случаях упругое основание отображается в виде модели с переменным коэффициентом постели.

Наиболее часто используется модель Фусса-Винклера, появившаяся еще в XIX веке. Ее главным достоинством является простота, основанная на гипотезе о прямой пропорциональности между передаваемым на основание давлением и прогибом. Применяя модель Фусса-Винклера, можно получить более близкие к экспериментальным данным величины контактных напряжений.

Анализ последних исследований. Основные результаты в построении теории изгиба пластин принадлежат Симеону Пуассону, Луи Навье и Густаву Кирхгоффу. В 1820 г. в докладе Л. Навье было представлено дифференциальное уравнение для поперечного изгиба пластины в общем виде. Первые работы по исследованию круглых пластин появились в XIX веке. В 1828 г. в работе [1] впервые получено решение задачи об изгибе упругой тонкой осесимметричной круговой пластины при действии равномерного поперечного давления и сосредоточенной поперечной силы в центре для двух случаев граничных условий – свободного опирания и жесткого защемления внешнего контура пластины. Именно в этой работе Пуассона введена величина, которую теперь называют коэффициентом Пуассона. Дальнейшая разработка теории изгиба пластин отражена в трудах Кирхгофа, который вывел вариационное уравнение для пластины, дающее возможность построения как дифференциального уравнения, так и граничных условий задачи.

Теория расчета круглых пластин подробно рассматривается в трудах С. П. Тимошенко и С. Войновского-Кригера [2], С. Д. Пономарева [3], Д. В. Вайнберга и Е. Д. Вайнберг [4] и многих других.

Теория расчета конструкций, лежащих на упругом основании с одним или двумя коэффициентами постели, получила развитие в трудах А.Н. Крылова, М.Н. Герсеванова, П.Л. Пастернака, В.З. Власова, Б.Н. Жемочкина, И.А. Симвулиди [5] и многих других. Среди зарубежных ученых этой задачей занимались О.С. Zienkiewicz [6], С.С. Desai, J.T. Christian, А.М. Ioannides и др. Задача расчета прямоугольной плиты на упругом основании до настоящего времени не имеет точного аналитического решения даже для простейшей модели упругого основания (модели Винклера). Основная проблема здесь заключается в удовлетворении статических граничных условий на краях плиты.

Из публикаций последних лет отметим работу [7], где представлена усовершенствованная модель изгиба тонкой вязкоупругой пластины, опирающейся на основание типа Винклера. Тонкая пластина является линейно вязкоупругой и подвергается нормально распределенной нагрузке, при этом учитывается влияние нормального напряжения по толщине пластины на прогиб и внутренние усилия. Основные уравнения для внутренних усилий и напряжений выводятся на основе общей теории вязкоупругости в условиях малой деформации. Показано, что предложенная модель имеет большую жесткость на изгиб по сравнению с классическими моделями, в которых не учитывается нормальное напряжение по толщине пластины. В обзорной статье [8] рассматривается состояние исследований в этой области, выделяются ключевые направления, включая моделирование почвенных сред, а также различные аналитические и численные подходы к анализу взаимодействия между фундаментом и грунтом.

Одной из актуальных проблем является расчет круглых и кольцевых пластин, лежащих на сплошном упругом основании [9]. В частности, фундаменты круглых в плане инженерных сооружений, которые опираются на грунт, рассчитывают именно как круглую пластину на упругом основании. Для задачи осесимметричного изгиба круглых плит на упругом основании предложено решение с помощью представления осадок плиты в виде собственных функций дифференциального оператора осесимметричных колебаний круглой пластинки со свободными гранями. Это решение реализовано при решении контактных задач для кольцевых плит.

Целью данной работы является исследование изгиба сплошных круглых пластин на переменном упругом основании методом конечных элементов.

Материалы и методика исследований. Рассмотрены двенадцать вариантов расчета – шесть для стальной круглой пластины и еще шесть – для бетонной круглой плиты при двух условиях опирания и трех различных законах изменения коэффициента постели. Для решения поставленной задачи используется метод конечных элементов, реализованный в ПК ЛИРА-САПР [10], как наиболее универсальный из численных методов.

Результаты исследования. Существует ряд модификаций модели Винклера, которые в интегральной форме позволяют учитывать неоднородные свойства основания, как в плане, так и по глубине. При слабых и сильно сжимаемых грунтах и небольших опорных площадях фундаментов применение этой модели дает хорошие результаты. Наиболее распространенной модификацией модели Винклера является модель переменного коэффициента постели. В частности, эта модель основания широко применяется при расчетах напряженно-деформированного состояния фундаментов конструкций, лежащих на лёссовых грунтах, склонных к проседанию. В таком случае коэффициент постели – переменная величина, зависящая от координаты, в которой определяется осадка основания. С математической точки зрения это приводит к необходимости решения соответствующих дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Вероятно, именно поэтому расчеты круглых и кольцевых пластин, лежащих на переменном упругом основании, посредством аналитических решений дифференциальных уравнений встречаются в научной периодике крайне редко. Примером может служить публикация [11], посвященная изучению свободных колебаний круглой пластины, лежащей на переменном упругом основании.

Эффективный метод аналитического решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для ряда задач механики предложил Ю.С. Крутий [12-15]. Однако приложение метода к расчету круглой пластины на упругом основании с переменным коэффициентом постели требует верификации, поэтому здесь рассмотрим особенности конечно-элементного анализа такой пластины при разных граничных условиях и разных законах изменения коэффициента постели.

Итак, рассмотрим круглую пластину постоянной цилиндрической жесткости (рис. 1), которая лежит на переменном упругом основании и находится под действием непрерывно распределенной поперечной нагрузки.

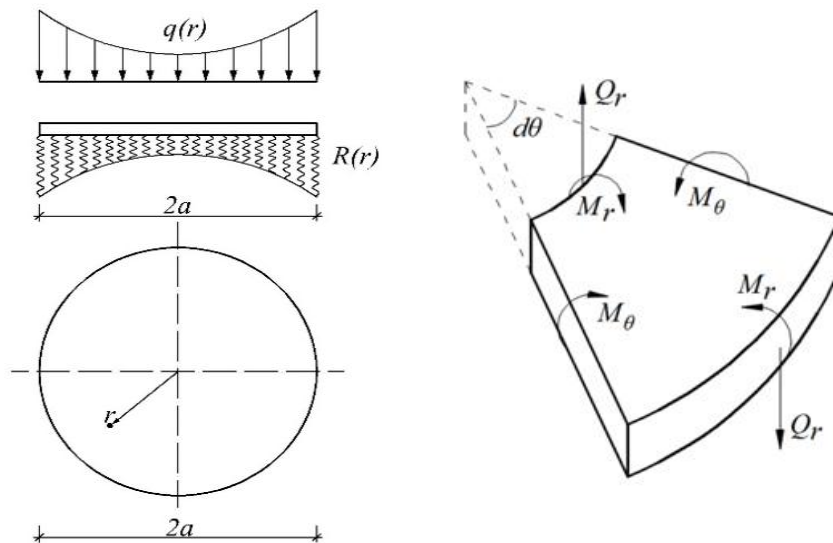


Рис. 1. Пластина на переменном упругом основании под действием поперечной нагрузки

Если действующие нагрузки $q(r)$, реакция упругого основания $R(r)$ и условия закрепления краев не зависят от полярного угла θ , возникает осесимметричный изгиб пластины. При таком изгибе в пластине действуют только три внутренних усилия, а именно, радиальный M_r и окружной M_θ изгибающие моменты, а также радиальная поперечная сила Q_r . Здесь a – радиус пластины, r – радиальная координата ($0 \leq r \leq a$).

Выполнено геометрическое и конечно-элементное моделирование пластины в ПК ЛИРА-САПР. На основе этой модели рассмотрим ряд задач с различными наборами исходных данных. А именно: рассмотрим две пластины, изготовленные из различных материалов, с шарнирным закреплением по контуру, а потом – эти же пластины, жестко закрепленные по контуру.

Расчеты для каждой из них выполним при трех моделях упругого основания – при нулевом коэффициенте постели, постоянном и изменяющемся по закону вогнутой параболы (рис. 2).

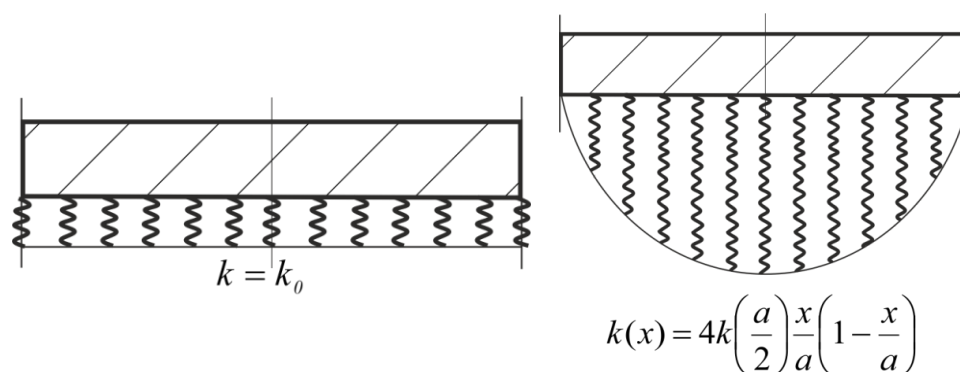


Рис. 2. Постоянный коэффициент постели и изменяющийся по закону вогнутой параболы

Вариант 1. Бетонная плита с шарнирным опиранием по контуру.

В качестве первого варианта рассмотрим круглую плиту толщиной $h = 0,12\text{ м}$ и радиусом $a = 1,8\text{ м}$, которая находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 15\text{ кПа}$. Материал – бетон ($E = 1,5 \cdot 10^7\text{ кПа}$; $\mu = 0$).

Результаты расчетов при нулевом коэффициенте постели, постоянном и изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Прогибы и моменты при различных коэффициентах постели в бетонной плите с шарнирным закреплением по контуру

Коорд. м	w, мм			M _r , кНм/м			M _θ , кНм/м		
	Закон изменения коэффициента постели								
	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола
0,000	-5,6948	-2,5135	-0,0037	9,1009	3,7513	-0,0023	9,1059	3,7521	-0,0023
0,086	-5,6794	-2,5071	-0,0037	9,0639	3,7452	-0,0027	9,0938	3,7501	-0,0024
0,171	-5,6330	-2,4880	-0,0037	8,9817	3,7314	-0,0036	9,0668	3,7456	-0,0027
0,257	-5,5559	-2,4562	-0,0038	8,8583	3,7100	-0,0053	9,0257	3,7387	-0,0031
0,343	-5,4485	-2,4116	-0,0038	8,6936	3,6801	-0,0083	8,9709	3,7291	-0,0039
0,429	-5,3112	-2,3546	-0,0039	8,4878	3,6406	-0,0128	8,9023	3,7167	-0,0051
0,514	-5,1447	-2,2850	-0,0040	8,2408	3,5899	-0,0191	8,8199	3,7012	-0,0068
0,6	-4,9498	-2,2032	-0,0041	7,9525	3,5265	-0,0267	8,7237	3,6822	-0,0089
0,686	-4,7273	-2,1093	-0,0043	7,6231	3,4482	-0,0347	8,6138	3,6594	-0,0115
0,771	-4,4784	-2,0036	-0,0047	7,2525	3,3528	-0,0411	8,4902	3,6322	-0,0143
0,857	-4,2041	-1,8862	-0,0051	6,8408	3,2378	-0,0429	8,3528	3,6002	-0,0169
0,943	-3,9059	-1,7577	-0,0057	6,3879	3,1003	-0,0362	8,2016	3,5627	-0,0189
1,029	-3,5852	-1,6184	-0,0065	5,8939	2,9375	-0,0168	8,0367	3,5193	-0,0195
1,114	-3,2437	-1,4688	-0,0073	5,3588	2,7459	0,0184	7,8581	3,4691	-0,0181
1,2	-2,8830	-1,3095	-0,0082	4,7826	2,5222	0,0700	7,6658	3,4116	-0,0138
1,286	-2,5052	-1,1413	-0,0089	4,1652	2,2627	0,1340	7,4597	3,3458	-0,0064
1,371	-2,1121	-0,9650	-0,0092	3,5068	1,9635	0,2003	7,2399	3,2711	0,0040
1,457	-1,7060	-0,7815	-0,0090	2,8073	1,6206	0,2519	7,0064	3,1866	0,0167
1,543	-1,2892	-0,5919	-0,0080	2,0667	1,2300	0,2667	6,7593	3,0915	0,0299
1,629	-0,8643	-0,3975	-0,0061	1,2851	0,7874	0,2210	6,4986	2,9848	0,0409
1,714	-0,4335	-0,1996	-0,0033	0,4625	0,2886	0,0954	6,2243	2,8655	0,0467
1,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6,0750	2,7987	0,0478

Вариант 2. Бетонная плита при тех же исходных данных, что и в предыдущем варианте, но с жестким закреплением по контуру. Результаты расчетов при нулевом коэффициенте постели, постоянном и изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Прогибы и моменты при различных коэффициентах постели в бетонной плите с жестким закреплением по контуру

Коорд, м	w, мм			M _r , кНм/м			M _θ , кНм/м		
	Закон изменения коэффициента постели								
	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола
0	-1,1341	-0,9118	-0,0036	3,0181	2,3520	-0,0036	3,0232	2,3556	-0,0035
0,086	-1,1290	-0,9078	-0,0036	2,9811	2,3262	-0,0042	3,0112	2,3471	-0,0037
0,171	-1,1136	-0,8959	-0,0037	2,8990	2,2688	-0,0057	2,9841	2,3282	-0,0042
0,257	-1,0882	-0,8761	-0,0037	2,7756	2,1820	-0,0080	2,9431	2,2995	-0,0049
0,343	-1,0532	-0,8487	-0,0038	2,6109	2,0654	-0,0112	2,8882	2,2609	-0,0059
0,429	-1,0090	-0,8141	-0,0039	2,4051	1,9183	-0,0153	2,8196	2,2124	-0,0073
0,514	-0,9562	-0,7727	-0,0040	2,1580	1,7399	-0,0196	2,7372	2,1537	-0,0088
0,6	-0,8958	-0,7251	-0,0042	1,8698	1,5291	-0,0234	2,6411	2,0847	-0,0105
0,686	-0,8285	-0,6720	-0,0045	1,5404	1,2848	-0,0249	2,5312	2,0051	-0,0121
0,771	-0,7553	-0,6140	-0,0048	1,1699	1,0057	-0,0221	2,4075	1,9147	-0,0133
0,857	-0,6775	-0,5522	-0,0052	0,7581	0,6907	-0,0126	2,2701	1,8132	-0,0138
0,943	-0,5965	-0,4875	-0,0057	0,3052	0,3383	0,0059	2,1189	1,7003	-0,0129
1,029	-0,5137	-0,4210	-0,0063	-0,1887	-0,0529	0,0343	1,9541	1,5757	-0,0103
1,114	-0,4307	-0,3541	-0,0067	-0,7238	-0,4843	0,0708	1,7754	1,4391	-0,0056
1,2	-0,3493	-0,2881	-0,0070	-1,3000	-0,9572	0,1102	1,5831	1,2901	0,0009
1,286	-0,2713	-0,2245	-0,0069	-1,9174	-1,4730	0,1421	1,3770	1,1284	0,0090
1,371	-0,1988	-0,1651	-0,0064	-2,5758	-2,0329	0,1516	1,1572	0,9536	0,0173
1,457	-0,1340	-0,1117	-0,0054	-3,2753	-2,6377	0,1206	0,9236	0,7655	0,0242
1,543	-0,0792	-0,0663	-0,0040	-4,0158	-3,2882	0,0303	0,6764	0,5638	0,0270
1,629	-0,0368	-0,0309	-0,0022	-4,7973	-3,9850	-0,1342	0,4154	0,3482	0,0231
1,714	-0,0095	-0,0080	-0,0007	-5,6198	-4,7282	-0,3808	0,1407	0,1184	0,0095
1,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-5,1377	-0,5333	0,0000	0,0000	0,0000

Вариант 3. Стальная пластина с шарнирным опиранием по контуру.

В качестве третьего варианта рассмотрим круглую пластину толщиной $h = 0,03\text{ м}$ и радиусом $a = 0,8\text{ м}$, которая находится под действием нагрузки, изменяющейся вдоль радиуса по линейному закону $q = q_0(1 - \frac{r}{a})$, где $q_0 = 200\text{ кПа}$ – интенсивность нагрузки в центре пластины (рис. 3). Материал – сталь ($E = 2,1 \cdot 10^8\text{ кПа}$; $\mu = 0,33$).

Результаты расчетов при нулевом коэффициенте постели, постоянном и изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Прогибы и моменты при различных коэффициентах постели в стальной пластине с шарнирным закреплением по контуру

Коорд, м	w , мм			M_r , кНм/м			M_θ , кНм/м		
	Закон изменения коэффициента постели								
	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола
0,000	-4,7441	-4,1093	-0,0435	14,2777	12,4048	0,1173	14,2858	12,4120	0,1182
0,038	-4,7294	-4,0965	-0,0433	14,1736	12,3118	0,1072	14,2242	12,3571	0,1122
0,076	-4,6857	-4,0585	-0,0430	13,9505	12,1132	0,0905	14,0900	12,2375	0,1015
0,114	-4,6132	-3,9955	-0,0424	13,6265	11,8257	0,0728	13,8938	12,0632	0,0894
0,152	-4,5126	-3,9082	-0,0417	13,2098	11,4572	0,0575	13,6400	11,8384	0,0781
0,190	-4,3849	-3,7974	-0,0409	12,7082	11,0149	0,0471	13,3331	11,5673	0,0689
0,229	-4,2313	-3,6640	-0,0400	12,1299	10,5065	0,0429	12,9774	11,2540	0,0628
0,267	-4,0529	-3,5092	-0,0391	11,4828	9,9391	0,0458	12,5771	10,9023	0,0604
0,305	-3,8513	-3,3344	-0,0380	10,7748	9,3200	0,0557	12,1367	10,5161	0,0620
0,343	-3,6282	-3,1409	-0,0369	10,0140	8,6563	0,0723	11,6603	10,0994	0,0673
0,381	-3,3854	-2,9305	-0,0356	9,2083	7,9549	0,0942	11,1523	9,6560	0,0762
0,419	-3,1248	-2,7046	-0,0342	8,3656	7,2228	0,1197	10,6170	9,1895	0,0877
0,457	-2,8483	-2,4651	-0,0325	7,4941	6,4670	0,1463	10,0587	8,7039	0,1008
0,495	-2,5581	-2,2137	-0,0305	6,6015	5,6942	0,1707	9,4817	8,2026	0,1142
0,533	-2,2563	-1,9524	-0,0281	5,6960	4,9111	0,1894	8,8902	7,6895	0,1261
0,571	-1,9450	-1,6829	-0,0253	4,7854	4,1247	0,1987	8,2886	7,1683	0,1349
0,610	-1,6265	-1,4073	-0,0220	3,8778	3,3415	0,1951	7,6811	6,6424	0,1387
0,648	-1,3029	-1,1272	-0,0183	2,9811	2,5683	0,1760	7,0719	6,1155	0,1362
0,686	-0,9764	-0,8447	-0,0141	2,1032	1,8118	0,1409	6,4653	5,5911	0,1265
0,724	-0,6490	-0,5615	-0,0096	1,2522	1,0787	0,0912	5,8655	5,0730	0,1098
0,762	-0,3229	-0,2794	-0,0048	0,4361	0,3757	0,0320	5,2768	4,5646	0,0876
0,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,9787	4,3052	0,0753

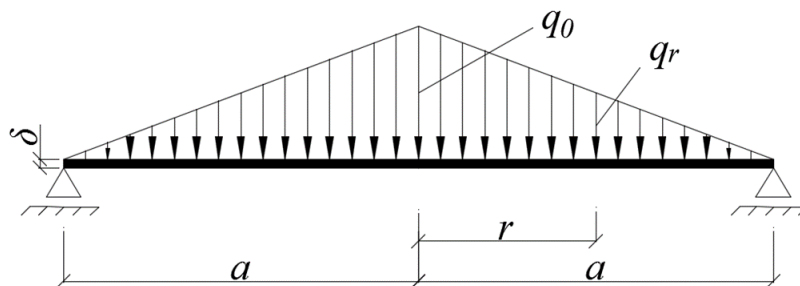


Рис. 3. Нагрузка, изменяющаяся вдоль радиуса по линейному закону

Вариант 4. Стальная пластина при тех же исходных данных, что и в предыдущем варианте, но с жестким закреплением по контуру.

Результаты расчетов при нулевом коэффициенте постели, постоянном и изменяющемся по закону вогнутой параболы, приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Прогибы и моменты при различных коэффициентах постели в стальной пластине с жестким закреплением по контуру

Коорд, м	W , мм			M_r , кНм/м			M_θ , кНм/м		
	Закон изменения коэффициента постели								
	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола	Нуль	Пост.	Вогнутая парабола
0,000	-1,3738	-1,3247	-0,0445	6,8144	6,5674	0,1273	6,8225	6,5752	0,1280
0,038	-1,3668	-1,3179	-0,0443	6,7104	6,4669	0,1194	6,7610	6,5158	0,1233
0,076	-1,3459	-1,2978	-0,0440	6,4873	6,2517	0,1075	6,6268	6,3863	0,1155
0,114	-1,3116	-1,2648	-0,0434	6,1633	5,9393	0,0967	6,4305	6,1970	0,1076
0,152	-1,2646	-1,2195	-0,0425	5,7465	5,5378	0,0901	6,1768	5,9525	0,1017
0,190	-1,2057	-1,1627	-0,0416	5,2450	5,0549	0,0895	5,8698	5,6569	0,0986
0,229	-1,1361	-1,0956	-0,0404	4,6667	4,4983	0,0954	5,5141	5,3144	0,0991
0,267	-1,0570	-1,0194	-0,0391	4,0195	3,8755	0,1073	5,1139	4,9291	0,1030
0,305	-0,9701	-0,9357	-0,0375	3,3116	3,1943	0,1237	4,6734	4,5052	0,1100
0,343	-0,8770	-0,8459	-0,0357	2,5507	2,4621	0,1421	4,1970	4,0467	0,1188
0,381	-0,7794	-0,7518	-0,0336	1,7450	1,6866	0,1592	3,6891	3,5578	0,1281
0,419	-0,6792	-0,6552	-0,0312	0,9024	0,8752	0,1707	3,1538	3,0424	0,1360
0,457	-0,5785	-0,5582	-0,0284	0,0308	0,0356	0,1719	2,5955	2,5047	0,1401
0,495	-0,4793	-0,4625	-0,0252	-0,8616	-0,8247	0,1577	2,0184	1,9488	0,1380
0,533	-0,3839	-0,3705	-0,0217	-1,7671	-1,6983	0,1234	1,4269	1,3786	0,1274
0,571	-0,2942	-0,2840	-0,0178	-2,6777	-2,5774	0,0652	0,8253	0,7984	0,1060
0,610	-0,2126	-0,2053	-0,0138	-3,5853	-3,4544	-0,0190	0,2179	0,2121	0,0725
0,648	-0,1412	-0,1363	-0,0098	-4,4820	-4,3217	-0,1292	-0,3913	-0,3759	0,0261
0,686	-0,0822	-0,0794	-0,0060	-5,3599	-5,1715	-0,2620	-0,9974	-0,9618	-0,0322
0,724	-0,0376	-0,0363	-0,0029	-6,2110	-5,9960	-0,4111	-1,5967	-1,5412	-0,1009
0,762	-0,0095	-0,0092	-0,0007	-7,0274	-6,7872	-0,5669	-2,1846	-2,1100	-0,1762
0,8	0,0000	0,0000	0,0000	-7,6665	-7,3124	-0,7026	-2,5286	-2,5143	-0,2352

На рис. 4 показана зависимость прогиба от координаты для стальной пластины, шарнирно закрепленной по контуру и опирающейся на основание, коэффициент постели которого изменяется по закону вогнутой параболы, а на рис. 5 – для такой же плиты, но жестко защемленной по контуру.

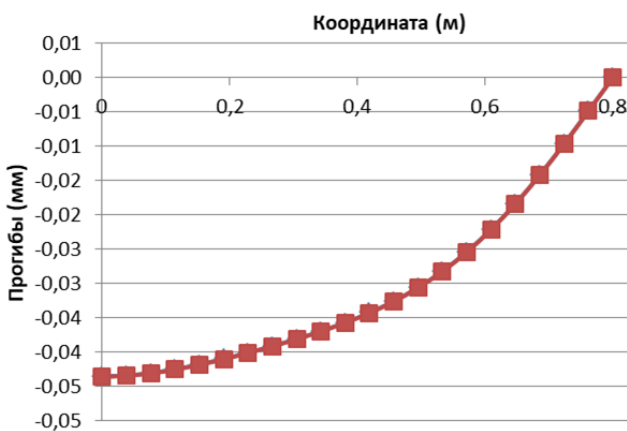


Рис. 4. Зависимость прогиба от координаты при постоянном коэффициенте постели

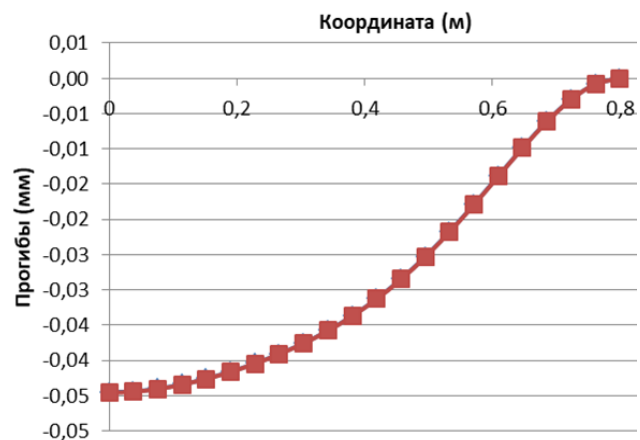


Рис. 5. Зависимость прогиба от координаты при коэффициенте постели, который изменяется по закону вогнутой параболы

Выводы. Таким образом, методом конечных элементов выполнено двенадцать вариантов расчета сплошной круглой пластины (плиты), лежащей на упругом основании типа Винклера, при двух условиях закрепления и трех разных законах изменения коэффициента постели. Моделирование и расчеты выполнены с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР. Во всех вариантах результаты полностью совпадают с известными результатами изгиба плит, не имеющих упругой основы и в случае, когда эта основа существует, а ее сопротивление является постоянным [4]. Расхождение здесь очень незначительное – в третьей значащей цифре после запятой для прогиба при шарнирном опирании и во второй – для моментов. При жестком защемлении прогибы и моменты также отличаются от соответствующих значений известных решений во второй значащей цифре после запятой.

Литература

1. Poisson S.D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences*. Paris. 1829. vol. VIII. P. 357-570, 623-627.
2. Тимошенко С. П. Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
3. Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. М.: Mashgiz, 1956. Т. 3. 884 с.
4. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. К: Будівельник, 1970. 436 с.
5. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. Изд. 3-е, испр. и доп. Учебное пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1973. 431 с.
6. Zienkiewich O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. 736 p.
7. Zhida Li, T. Yang, Wen-bo Luo. An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation. *Natural Science*. 2009. Vol. 1, No. 2. P. 120-123.
8. Wang Y. H., Tham L. G., Cheung Y. K. Beams and plates on elastic foundations: A review. *Progress in Structural Engineering and Materials*. 2005. Vol. 7(4). P. 174–182.
9. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
10. Городецкий Д.А., Барабаш М.С., Водопьянов Р.Ю. и др. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Учебное пособие; под ред. акад. РААСН А.С. Городецкого. М., 2015. 376 с.
11. Доронин А. М., Соболева В. А. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера. *Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского*. 2014. №4 (1). С. 254–258.
12. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформованих систем зі змінними неперервними параметрами : дис. докт. техн. наук : 01.02.04 / Одеська державна академія будівництва та архітектури. Одеса, 2016. 272 с.
13. Крутий Ю.С., Сурьянинов Н.Г. Точное решение дифференциального уравнения устойчивости равновесия упругого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью. *Вісник КНУТД*. 2016. № 1 (94). С. 72-84.
14. Shvab'yuk V.I., Krutii Y.S., Surianinov M. Investigation of the Free Vibrations of Bar Elements with Variable Parameters Using the Direct Integration Method. *Strength of Materials*. 2016. Vol. 48, Issue 3, P. 384-393.
15. Krutii Yu., Surianinov M., Vandynskiy V. Analytic Formulas for the Cantilever Structures' Natural Frequencies with Taking into Account the Dead Weight. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 450-459.

References

- [1] S.D. Poisson, "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, vol. VIII, pp. 357-570, 623-627, 1829.
- [2] S.P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kriger, *Plastiny` i obolochki*. M.: Nauka, 1966.
- [3] S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, K.K. Likharev, V.M. Makushin, N.N. Malinin, V.I. Feodos`ev, *Raschet` na prochnost` v mashinostroenii*. M.: Mashgiz, T. 3, 1956.

- [4] D.V. Vajnberg, E.D. Vajnberg, *Raschet plastin*. K: Budi`vel`nik, 1970.
- [5] I.A. Simvulidi, *Raschet inzhenerny`kh konstrukcij na uprugom osnovanii*. Izd. 3-e, ispr. i dop. Uchebnoe posobie dlya vuzov. M., «Vy`ssh. shkola», 1973.
- [6] O.C. Zienkiewich, R.L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] Zhida Li, T. Yang, Wen-bo Luo, "An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation, *Natural Science*, vol. 1, no. 2, pp. 120-123, 2009.
- [8] Y.H. Wang, L.G. Tham, Y.K. Cheung, "Beams and plates on elastic foundations: A review", *Progress in Structural Engineering and Materials*, vol. 7(4), pp. 174–182, 2005.
- [9] M.I. Gorbunov-Posadov, T.A. Malikova, *Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii*. M.: Strojizdat, 1973.
- [10] D.A. Gorodeczkij, M.S. Barabash, R.Yu. Vodop`yanov i dr., *Programmny`j kompleks LIRA-SAPR 2015*. Uchebnoe posobie; pod red. akademika RAASN A.S. Gorodeczkogo. M., 2015.
- [11] A.M. Doronin, V.A. Soboleva, "Sobstvenny`e kolebaniya krugloj plastinki, lezhashhej na peremennom uprugom osnovanii tipa Vinklera", *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. Lobachevskogo*, no. 4 (1), pp. 254-258, 2014.
- [12] Yu.S. Kruti`j, "Rozrobka metodu rozv'yazannya zadach sti`jkosti` i` kolivan` deformi`vnikh sistem zi` zmi`nnimi neperervnimi parametrami", dis. dokt. tekhn. nauk : 01.02.04, Odes'ka derzhavna akademiya budivnictva ta arhitekturi. Odesa, 2016.
- [13] Yu.S. Krutij, M.G. Suriaaninov, "Tochnoe reshenie differencijal'nogo uravneniya ustojchivosti ravnovesiya uprugogo sterzhnya s proizvol`noj neprery`vnoj peremennoj zhestkost`yu", *Vi`snik KNUTD*, no. 1 (94), pp. 72-84, 2016.
- [14] V.I. Shvab`yuk, Y.S. Krutii, M. Surianinov, "Investigation of the Free Vibrations of Bar Elements with Variable Parameters Using the Direct Integration Method", *Strength of Materials*, vol. 48, Issue 3, pp. 384-393, 2016.
- [15] Yu. Krutii, M. Surianinov, V. Vandynskiyi, "Analytic Formulas for the Cantilever Structures' Natural Frequencies with Taking into Account the Dead Weight", *Materials Science Forum*, vol. 968, pp. 450-459, 2019.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ КРУГЛИХ ПЛАСТИН НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗІ ЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПОСТЕЛІ

¹Крутії Ю.С., д.т.н., професор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹Сур'янінов М.Г., д.т.н., професор,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

¹Сорока М.М., к.т.н., доцент,
soroka@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-9551-9475

¹Карнаухова Г.С., асистент
karnauhovaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-3542-4300

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Анотація. Представлені результати дослідження напружено-деформованого стану круглої пластини постійної циліндричної жорсткості, яка лежить на змінній пружній основі і знаходиться під дією безперервно розподіленого поперечного навантаження.

Розглянуто дванадцять варіантів розрахунку – шість для сталевий круглої пластини і ще шість – для бетонної круглої плити при двох умовах закріплення і трьох різних законах зміни коефіцієнта постелі. Для вирішення поставленого завдання використовується метод скінчених елементів, реалізований в ПК ЛІРА-САПР.

Відзначено, що в разі, коли коефіцієнт постелі – змінна величина, що залежить від координати, в якій визначається осідання основи, аналітичний підхід призводить до необхідності вирішення відповідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Тому розрахунки круглих і кільцевих пластин, що лежать на змінній пружній основі, за допомогою аналітичних рішень диференціальних рівнянь зустрічаються в науковій періодиці вкрай рідко і

носять приватний характер. Ефективний метод аналітичного рішення диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для задач механіки запропонував один з авторів статті, однак додаток методу до розрахунку круглої пластини на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі вимагає верифікації, тому тут розглянуті особливості скінчено-елементного аналізу такої пластини при різних граничних умовах і різних законах зміни коефіцієнта постелі.

У всіх варіантах результати повністю збігаються з відомими результатами вигину плит, які не мають пружної основи і в разі, коли ця основа існує, а її опір є постійним. Розбіжність тут дуже незначна – в третій значущій цифрі після коми для прогину при шарнірному закріпленні і в другій – для моментів. При жорсткому защемленні прогини і моменти також відрізняються від відповідних значень відомих рішень в другій значущій цифрі після коми.

Ключові слова: кругла пластина, пружна основа, змінний коефіцієнт постелі, модель Фусса-Вінклера, метод скінчених елементів, ЛІРА-САПР.

NUMERICAL ANALYSIS OF CIRCULAR PLATES ON AN ELASTIC BASE WITH VARIABLE BED COEFFICIENT

¹**Krutii Yu.S.**, Doctor of Science, Professor,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹**Surianinov M.G.**, Doctor of Science, Professor,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

¹**Soroka M.M.**, PhD., Assistant Professor,
soroka@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-9551-9475

¹**Karnauhova G.S.**, assistant
karnauhovaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-3542-4300
¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
4, Didrikhson street, Odessa, 65029, Ukraine

Abstract. The paper presents the results of a study of the stress-strain state of a circular plate of constant cylindrical stiffness, which lies on a variable elastic foundation and is under the influence of a continuously distributed transverse load.

Twelve variants of calculation are considered – six for a steel round plate and six more – for a concrete round plate under two conditions of fixing and three different laws of variation of the bed coefficient. To solve the problem, the finite element method implemented in the LIRA-SAPR software package is used.

It is noted that in the case when the bedding coefficient is a variable value depending on the coordinate in which the foundation settlement is determined, the analytical approach leads to the need to solve the corresponding differential equations with variable coefficients. Therefore, calculations of circular and annular plates lying on a variable elastic foundation by means of analytical solutions of differential equations are extremely rare in scientific periodicals and are of a private nature. An effective method for the analytical solution of differential equations with variable coefficients for a number of problems in mechanics was proposed by one of the authors of the article, however, the application of the method to the calculation of a circular plate on an elastic foundation with a variable bed coefficient requires verification, therefore, here we consider the features of the finite element analysis of such a plate under different boundary conditions and different laws of variation of the bed coefficient.

In all versions, the results completely coincide with the known results of bending of slabs that do not have an elastic base and in the case when this base exists and its resistance is constant. The discrepancy here is very insignificant – in the third significant digit after the decimal point for deflection when hinged and in the second for moments. In case of rigid clamping, the deflections and moments also differ from the corresponding values of the known solutions in the second significant digit after the decimal point.

Keywords: round plate, elastic base, variable bed coefficient, Fuss-Winkler model, finite element method, LIRA-SAPR.

Стаття надійшла до редакції 01.10.2020