УДК 514.07

УМОВИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Вашпанова Н. В.[1], Подоусова Т. Ю.[2], Шевченко Т. І.[2]
[1]*Одеська національна академія харчових технологій*
[2]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Робота присвячена вивченню деформацій псевдоріманових просторів. Попередні формули для деформацій метрик записані Сен-Венаном в частинних похідних зведені до рівнянь в коваріантних похідних. Умови Сен-Венана — це умови накладені на тензор деформації, що забезпечують збереження евклідовості простору. Отримані узагальнені умови Сен-Венана — це умови збереження тензора Рімана при деформаціях метрик псевдоріманових просторів.

Розроблений метод дозволяє записувати умови збереження і інших внутрішніх об’єктів псевдоріманових просторів. Наприклад, тензор Вейля, тензор конформної кривини, тензор Річчі.

Через значні технічні труднощі локальних розв’язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або деформацій.

Розглянуті спеціальні деформації, які називають канонічними. Тензор деформації в цьому випадку є лінійною комбінацією метричного тензору та тензору Річчі. В випадку трьохвимірного псевдоріманового простору до канонічних деформацій, за необхідністю, відносяться геодезичні деформації, при яких зберігаються геодезичні лінії. Накладаючи додаткові умови на тензор Річчі вивчення канонічних деформацій зводиться до солітонов Річчі.

Солітони Річчі, що природно виникають із теорії потоків Річчі, дають ще один тип спеціальних псевдоріманових просторів. Зокрема доведено, що в псевдорімановому просторі з градієнтним задаючим вектором сталої довжини, скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон Річчі стійкий.

Якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.

Обґрунтовано, що, якщо в псевдорімановому просторі існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний.

Застосування отриманих результатів продемонстровано за допомогою прикладів. Дослідження ведуться локально, тензорними методами, без обмеження на знак метрики.

Ключові слова: канонічні деформації, псевдоріманові простори, умови Сен-Венана.

SAINT-VENANT’S CONDITIONS FOR PSEUDO-REIMANNIAN SPACES

N. Vashpanova[1], T. Podousova[2], T. Shevchenko[2]
[1]*Odessa National Academy of Food Technologies*
[2]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The article is devoted to the study of the deformations of pseudo-Reimannian spaces. The preceding formulas for metrics’ deformations recorded by Saint-Venan in partial derivatives are reduced to the equations in covariant derivatives. Saint-Venan's conditions are the conditions imposed on the strain tensor, which preserve the Euclidean space. The generalized conditions of Saint-Venan are the conditions of Riemann tensor’s preservation under the deformations of the metrics of pseudo-Reimannian spaces.

The developed method allows to record the preservation conditions of other internal objects of pseudo-Reimannian spaces, for example, Weyl tensor, the tensor of conformal curvature, Ricci tensor.

Due to the considerable technical difficulties of local solutions to such problems, it is necessary to specialize the spaces or the deformations.

Special deformations called canonical are considered. The deformation tensor in this case is a linear combination of the metric tensor and Ricci tensor. In the case of a three-dimensional pseudo-Reimannian space, if it is necessary, the canonical deformations include the geodetic deformations at which the geodetic lines are preserved. Imposing additional conditions on Ricci tensor the studying of canonical deformations is reduced to Ricci solitons.

The Ricci solitons, naturally arising from the Ricci flow theory, provide another type of special pseudo-Reimannian spaces. In particular, it is proved that in the pseudo-Reimannian space with a gradient set vector of constant length, the scalar curvature is constant if the Ricci soliton is stable.

If there is a gradient set soliton vector in the equidistant pseudo-Reimannian space, so either it is collinear to the circular or the circular vector field is constant covariantly.

It is substantiated if there is more than one significant gradient vector field in the pseudo-Reimannian space defining the Ricci soliton, this space is equidistant.

The application of the obtained results is demonstrated by the examples. The studies are conducted locally by tensor methods without any limitation.

Keywords: canonical deformations, pseudo-Reimannian spaces, Saint-Venan conditions.

1 ВСТУП

Деформації узагальнених геометричних просторів утворюють один із актуальних напрямків сучасної диференціальної геометрії. В теорії деформацій працювала велика кількість вчених як математиків та механіків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів.

З часів Сен-Венана вивчення деформацій зводиться до системи диференціальних рівнянь. Система диференціальних рівнянь приводить до алгебраїчної системи, що представляє собою умови інтегрування. Частіше за все, ці системи перевизначені, вводячи додаткові обмеження, їх спрощують або інтегрують.

Зауважимо, що принципова можливість локального розв'язку цих задач поєднуються з серйозними труднощами технічного характеру. Тому зберігає актуальність задача вивчення внутрішніх тензорних характеристик узагальнених просторів, що дозволяють чи не дозволяють вказані деформації. Це, в свою чергу, приводить до спеціалізації просторів або до спеціалізації деформацій.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В своїй першій роботі, виданій 180 років тому, в 1839 році, Сен-Венан розпочав розробку методів, які знайшли широке застосування в теорії деформацій. Сьогодні принцип Сен-Венана вивчений достатньо ґрунтовно. Огляд основних робіт за період до 1955 року можна знайти в роботі Г. Джанелідзе [1]. Після того слід відмітити роботи Н.П. Азанова [2, 3], в яких умови Сен-Венана застосовуються для псевдоріманових просторів.

Під умовами Сен-Венана розуміють умови, яким задовольняє тензор деформації для того, щоб при деформації зберігалась евклідовість просторів.

Узагальнені умови Сен-Венана – це умови співпадіння тензора Рімана псевдоріманового простору, що деформується та псевдо ріманового простору результату деформації.

Ця робота присвячена застосуванню умов Сен-Венана до введених І. Потапенком [4] канонічних деформацій.

Тобто таких деформацій, для яких тензор деформації є лінійна комбінація метричного тензора та тензора Річчі.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є виявлення нових характеристик псевдоріманових просторів, пов'язаних з їх нескінченно малими деформаціями.

Об'єктом дослідження є спеціальні псевдоріманові простори, тобто простори, які виділяються виконанням в них певних умов, накладених на внутрішні об'єкти та спеціальні деформації.

Предметом дослідження являються диференціальні рівняння, їх умови інтегреваності та диференціальні продовження, які характеризують те допускає чи не допускає заданий узагальнений простір вказаний тип деформацій. Шляхом введення додаткових обмежень, спеціалізації просторів розв'язуються задачі описання геометричних характеристик псевдоріманових просторів, що допускають чи не допускають певні типи деформацій.

Методи дослідження – це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів, без обмежень на знаковизначеність та сигнатуру метрики.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Узагальнені умови сен-венана. Нехай V_n – псевдоріманів простір з метричним тензором g_{ij}, а $\overline{V}_n$ – псевдоріманів простір з метричним тензором $\overline{g}_{ij}$. Будемо вважати, що метричні тензори відрізняються на нескінченно малу величину γ_{ij}, тобто

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} + \gamma_{ij}. \tag{1}$$

Нескінченно малі величини вище першого порядку до уваги не беремо. Для тензорів обернених до метричних будемо мати

$$\overline{g}^{ij} = g^{ij} - g^{i\alpha} g^{j\beta} \gamma_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Компоненти тензора γ_{ij} називають компонентами тензорного поля швидкостей нескінченно малої деформації.

В спільній за деформацією системі координат для символів Христоффеля виконується

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x). \tag{3}$$

Спільною за деформацією системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Тензор $P_i j^h(x)$ називають тензором деформації зв'язності при даній деформації. З (1), (2) отримаємо

$$2P^h_{ij} = g^{h\alpha}(\nabla_i \gamma_{\alpha j} + \nabla_j \gamma_{\alpha i} - \nabla_\alpha \gamma_{ij}),$$

∇ – знак коваріантної похідної за зв'язністю V_n.

Якщо $P^h_{ij}(x) \neq 0$, то деформацію називають нетривіальною.

Зауважимо, що тензор деформації зв'язності симетричний за коваріантними індексами, тобто $P^h_{ij} = P^h_{ji}$.

Так як, тензор деформації задовольняє умові

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j),$$

то для тензора деформації зв'язності виконується рівняння

$$2P^h_{ij} = \nabla_j \nabla_i u^h - u^\alpha R^h_{ij\alpha}.$$

Тут u_h – вектор деформації, $u^i = u_\alpha g^{\alpha i}$.

Тензор нескінченно малого обертання має вигляд $\omega_{ij} = 1/2(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i)$.

В разі відсутності обертання вектор u_i буде градієнтним [2, 3, 5, 6, 7].

В випадку тензорного поля S типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ коваріантна похідна по зв'язності V_n, в кожній системі координат $x^1 x^2, ..., x^n$ визначається наступним чином:

$$\begin{gathered}\nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \partial_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \Gamma^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \Gamma^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \\ -\Gamma^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - \Gamma^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x),\end{gathered} \tag{4}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-62-74

$(i_1,...,i_p;\ j_1,...,j_q;\ k=1,2,...,n)$.

Для простору $\bar{V}_n$ та коваріантній похідної в ньому $\bar{\nabla}$ будемо мати в спільній системі координат:

$$\bar{\nabla}_k S^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q}(x)=\partial_k S^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q}(x)+\bar{\Gamma}^{i_1}_{k\alpha}(x)+...+\bar{\Gamma}^{i_p}_{k\alpha}(x)S^{i_1i_2...i_{p-1}\alpha}_{j_1j_2...j_q}(x)-$$
$$-\bar{\Gamma}^{\beta}_{kj_1}(x)S^{i_1i_2...i_p}_{\beta j_2...j_q}(x)-...-\bar{\Gamma}^{\beta}_{kj_q}(x)S^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_{q-1}\beta}(x).$$

Віднімаючи від останнього (9), з урахуванням (3), отримаємо

$$\bar{\nabla}_k S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}(x)-\nabla_k S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}(x)=P^{i_1}_{k\alpha}(x)S^{\alpha i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}(x)+\ldots+P^{i_p}_{k\alpha}(x)S^{i_1i_2\ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1j_2\ldots j_q}(x)-$$
$$-P^{\beta}_{kj_1}(x)S^{i_1i_2\ldots i_p}_{\beta j_2\ldots j_q}(x)-\ldots-P^{\beta}_{kj_q}(x)S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_{q-1}\beta}(x), \tag{5}$$
$(i_1,...,i_p;\ j_1,...,j_q;\ k=1,2,...,n)$.

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації зв'язності (5) прийме вигляд

$$\bar{\nabla}_k P^h_{ij}(x)-\nabla_k P^h_{ij}(x)=P^h_{k\alpha}(x)P^{\alpha}_{ij}(x)-P^{\alpha}_{ki}(x)P^h_{\alpha j}(x)-P^{\alpha}_{kj}(x)P^h_{i\alpha}(x).$$

Симетруючи останнє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_k P^h_{ij}+\bar{\nabla}_j P^h_{ik}-\nabla_k P^h_{ij}-\nabla_j P^h_{ik}=-2P^{\alpha}_{kj}P^h_{i\alpha}.$$

А, альтернуючи –

$$\overset{'}{\nabla}_k P^h_{ij}-\overset{'}{\nabla}_j P^h_{ik}-\nabla_k P^h_{ij}+\nabla_j P^h_{ik}=-2(P^h_{k\alpha}P^{\alpha}_{ij}-P^{\alpha}_{ki}P^h_{\alpha j}). \tag{6}$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R^h_{.ijk}=\partial_j\Gamma^h_{ik}+\Gamma^{\alpha}_{ik}\Gamma^h_{j\alpha}-\partial_k\Gamma^h_{ij}-\Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^h_{k\alpha},$$

при деформації простору V_n в $\bar{V}_n$ запишеться в вигляді [8]

$$\bar{R}^h_{.ijk}=R^h_{.ijk}+\nabla_k P^h_{ji}-\nabla_j P^h_{ki}+P^h_{\alpha k}P^{\alpha}_{ji}-P^h_{\alpha j}P^{\alpha}_{ki}.$$

Або, з урахуванням (6),

$$\bar{R}^h_{.ijk}=R^h_{.ijk}+\frac{1}{2}(\nabla_k P^h_{ji}-\nabla_j P^h_{ki}+\bar{\nabla}_k P^h_{ji}-\bar{\nabla}_j P^h_{ki}). \tag{7}$$

Рівняння сумісності Сен-Венана, якщо перейти до коваріантної похідної та вимагати, щоб простір, що деформується та результат деформації були пласкими має вигляд:

$$\nabla_l\nabla_k\gamma_{ij}+\nabla_i\nabla_j\gamma_{lk}-\nabla_l\nabla_j\gamma_{ik}-\nabla_i\nabla_k\gamma_{lj}=0. \tag{8}$$

Переходячи до розгляду псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ не обмежуючи значення тензора кривини, отримаємо

$$\bar{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\frac{1}{2}g^{h\alpha}(\nabla_k\nabla_i\gamma_{j\alpha}+\nabla_j\nabla_{\alpha}\gamma_{ki}-\nabla_k\nabla_{\alpha}\gamma_{ij}-\nabla_j\nabla_i\gamma_{\alpha k}-\gamma_{\alpha\beta}R^{\beta}_{ijk}-\gamma_{\beta i}R^{\beta}_{\alpha jk}). \tag{9}$$

Із останнього отримаємо узагальнену умову Сен-Венана для псевдоріманових просторів, а саме: для того, щоб нескінченно мала деформація залишала інваріантним тензор кривини, необхідно і достатньо, щоб

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-62-74

$$\nabla_i\nabla_j\gamma_{kl}+\nabla_k\nabla_l\gamma_{ij}-\nabla_i\nabla_l\gamma_{jk}-\nabla_k\nabla_j\gamma_{il}=R^{\alpha}_{jki}\gamma_{\alpha l}+R^{\alpha}_{lki}\gamma_{j\alpha}.$$

Таким чином, має місце теорема:

Теорема 1. Виконання узагальнених умов Сен-Венана необхідна і достатня умова для того, щоб

$$\nabla_k P^h_{ji}-\nabla_j P^h_{ki}=\bar{\nabla}_j P^h_{ki}-\bar{\nabla}_k P^h_{ji}.$$

Умови Сен-Венана для канонічних деформацій. Умови сен-венана для канонічних деформацій перейдемо до розгляду умов на тензори річчі. з (7) отримаємо, що тензор річчі $R_{ij}=R^{\alpha}_{ij\alpha}$ змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij}=R_{ij}+\frac{1}{2}(\nabla_\alpha P^{\alpha}_{ji}-\nabla_j P^{\alpha}_{\alpha i}+\bar{\nabla}_\alpha P^{\alpha}_{ji}-\bar{\nabla}_j P^{\alpha}_{\alpha i}). \tag{10}$$

Згортаючи (9) отримаємо, аналог рівнянь (10):

$$\bar{R}_{ij}=R_{ij}+\frac{1}{2}(g^{\alpha\beta}(\nabla_\beta\nabla_i\gamma_{j\alpha}+\nabla_j\nabla_\alpha\gamma_{\beta i}-\nabla_\beta\nabla_\alpha\gamma_{ij}-\nabla_j\nabla_i\gamma_{\alpha\beta}-\gamma_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{ij\beta})+\gamma_{\alpha i}R^{\alpha}_{j}).$$

Нескінченно мала деформація виду (1) псевдоріманового простору (V_n, g_{ij}) називається канонічною, якщо тензор деформації δg_{ij} можна подати у вигляді

$$\gamma_{ij}=\overset{1}{\tau}g_{ij}+\overset{2}{\tau}R_{ij}, \tag{11}$$

де $\overset{1}{\tau},\overset{2}{\tau}$ – деякі інваріанти.

Відомо, що клас канонічних нескінченно малих деформацій не пустий. В випадку тримірних псевдоріманових просторів до цього класу належать інфінітезимальні геодезичні деформації [3].

Нескінченно мала деформація псевдоріманового простору V_n, при якій його геодезичні лінії переходять в геодезичні лінії $\tilde{V}_n$ називається інфінітезимальною геодезичною деформацією [6].

Згортаючи (11), отримаємо $\Delta_2 u=n\overset{1}{\tau}+R\overset{2}{\tau}$, тут $\Delta_2 u=\nabla_\alpha u^\alpha$ – другий символ Бельтрамі. Враховуючи це, (11) можна записати в вигляді

$$\gamma_{ij}=\frac{\Delta_2 u}{n}g_{ij}+\overset{2}{\tau}E_{ij},$$

де E_{ij} – тензор Ейнштейна, $E_{ij}=R_{ij}-\frac{R}{n}g_{ij}$.

Згідно закону Гука для однорідного ізотропного середовища

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{E}((1+x)H_{ij}-xHg_{ij}),$$

де H_{ij} – тензор напруження, $H=g^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}$, E – модуль Юнга, x – коефіцієнт Пуасона.

Підставляючи відповідні умови в рівняння (8) або (9), ми будемо отримувати формули для конкретних деформацій [9, 10, 11, 12, 13].

Наприклад, для канонічних, будемо мати коваріантно диференціюючи (11):

$$\nabla_l\nabla_k\gamma_{ij}=\nabla_l\nabla_k\overset{1}{\tau}g_{ij}+\nabla_l\nabla_k\overset{2}{\tau}R_{ij}+\nabla_k\overset{2}{\tau}\nabla_l R_{ij}+\nabla_l\overset{2}{\tau}\nabla_k R_{ij}+\overset{2}{\tau}\nabla_l\nabla_k R_{ij}.$$

Підставляючи останнє в узагальнені умови Сен-Венана, отримаємо

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-62-74

$$\nabla_i\nabla_j \overset{1}{\tau} g_{kl} + \nabla_k\nabla_l \overset{1}{\tau} g_{ij} - \nabla_i\nabla_l \overset{1}{\tau} g_{jk} - \nabla_k\nabla_j \overset{1}{\tau} g_{il} + \nabla_i\nabla_j \overset{2}{\tau} R_{kl} + \nabla_k\nabla_l \overset{2}{\tau} R_{ij} -$$
$$-\nabla_i\nabla_l \overset{2}{\tau} R_{jk} - \nabla_k\nabla_j \overset{2}{\tau} R_{il} + \overset{2}{\tau}(\nabla_i\nabla_j R_{kl} + \nabla_k\nabla_l R_{ij} - \nabla_i\nabla_l R_{jk} - \nabla_k\nabla_j R_{il}) -$$
$$-\nabla_j \overset{2}{\tau}(\nabla_k R_{il} - \nabla_i R_{kl}) + \nabla_i \overset{2}{\tau}(\nabla_j R_{kl} - \nabla_l R_{jk}) + \nabla_k \overset{2}{\tau}(\nabla_l R_{ij} - \nabla_j R_{il}) - \qquad (12)$$
$$-\nabla_l \overset{2}{\tau}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_k R_{ij}) = \overset{2}{\tau}(R_{\alpha l} R^{\alpha}_{jki} + R_{\alpha j} R^{\alpha}_{lki}).$$

Таким чином, має місце:

Теорема 2. При канонічних деформаціях псевдоріманових просторів із збереженням тензора Рімана за необхідністю виконується умова (12).

Спеціальні канонічні деформації. Якщо в рівнянні (11), $\overset{1}{\tau} = \lambda = const$, а $\overset{2}{\tau} = -1$, то рівняння приймає вигляд

$$\nabla_j u_i + \nabla_i u_j = \lambda g_{ij} - R_{ij}.$$

Означення 1. Деформації псевдоріманових просторів, вектор деформації яких задовольняє умовам (24), будемо називати спеціальними канонічними деформаціями.

Виділення таких деформацій зумовлене тісним зв'язком їх вивчення є теорією потоків Річчі.

Потоком Річчі називають сімейство метрик на многовиді M таке, що

$$\frac{d}{dt} g_t = -2Ric(g_t), \qquad (13)$$

де $Ric(g)$ – тензор Річчі метрики g.

В роботах, пов'язаних з доведенням гіпотези Пуанкаре, потоки Річчі ріманових просторів використовувались як важливий технічний засіб дослідження, і було отримано багато результатів про існування та властивості таких потоків [14].

З іншого боку, інтерес до геометричних властивостей таких метрик привів до солітонів Річчі [14], а також до $\varphi(Ric)$ – векторних полів [15, 16, 17, 18].

З самоподібним розв'язком рівняння (13), яке має назву рівняння Гамільтона, пов'язане поняття солітона Річчі як метрики, що задовольняє рівнянням

$$-2Ric_0 = L_{X_0} g_0 + 2\lambda g_0, \qquad (14)$$

для деякого векторного поля X_0 на M, похідної Лі L_{X_0} по відношенню до X_o і сталої λ.

Якщо $\lambda = 0$ солітон Річчі називають стійким, при $\lambda < 0$ – стискаючим, а при $\lambda > 0$ – розтягуючим. Ми будемо користуватись цими визначеннями, хоча застосовуються й інші.

Таким чином, під солітоном розуміють трійку: метрику g, векторне поле X_o та сталу λ. Векторне поле X_o називають задаючим солітон-вектором. Якщо задаючий вектор градієнтний, то градієнтним називають і солітон.

Нехай V_n псевдоріманів простір з метричним тензором g_{ij}, тоді рівняння (14) для градієнтних солітонів в індексній формі запишеться [14]

$$\nabla_j \varphi_i = \lambda g_{ij} - R_{ij}, \qquad (15)$$
$$\lambda_{,i} = 0, \qquad (16)$$

де φ_i – деякий ненульовий градієнтний вектор.

Умови інтегрованості, з урахуванням тотожності Річчі приймуть вид

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = -(\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik}), \tag{17}$$

тут R^h_{ijk} – тензор Рімана V_n.

Враховуючи тотожність Біанкі (17), запишемо так

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \nabla_\alpha R^\alpha_{ikj}. \tag{18}$$

Згортаючи останнє з g^{ij}, де g^{ij} – елементи оберненої до $\|g_{ij}\|$ матриці, будемо мати $\varphi_\alpha R^\alpha_k = -\nabla_k R/2$, тут $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ – скалярна кривина V_n.

Якщо вектор φ_i має сталу довжину, тобто $\varphi_\alpha \varphi^\alpha = const$, де $\varphi^h = \varphi_\alpha g^{\alpha h}$, то коваріантно диференціюючи та враховуючи (15) та (18), отримаємо

$$\lambda \varphi_i + \frac{\nabla_i R}{2} = 0.$$

Останнє дає можливість сформулювати теорему:

Теорема 3. В псевдорімановому просторі V_n з задаючим солітон-вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон стійкий.

Векторне поле називають конциркулярним, якщо воно задовольняє умові

$$\nabla_j \zeta_i = \rho g_{ij}, \tag{19}$$

тут $\zeta_i \neq 0$, ρ – деякий інваріант.

Якщо $\rho = const$, то векторне поле називають – збіжним, а в випадку $\rho = 0$ – коваріантно сталим. Простори, в яких існує конциркулярне векторне поле, називають еквідистантними.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n, в якому виконуються рівняння (15), (16) та (19). Має місце теорема:

Теорема 4. Якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі V_n існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.

Доведення.

Умови інтегрування (19) мають вигляд

$$\zeta_\alpha R^\alpha_{ijk} = c(\zeta)(\zeta_k g_{ij} - \zeta_j g_{ik}),$$

де $c(\zeta)$ – деякий інваріант, що залежить від ζ, такий що $\nabla_i \rho = c(\zeta)\zeta_\alpha$.

Із останнього, враховуючи (40) отримаємо

$$\rho R_{hijk} + \zeta_\alpha \nabla_h R^\alpha_{ijk} = c'(\zeta)(g_{ij}\zeta_k\zeta_h - g_{ik}\zeta_j\zeta_h) + c(\zeta)\rho(g_{ij}g_{kh} - g_{ik}g_{gh}),$$

тут $R_{hijk} = g_{\alpha n} R^\alpha_{ijk}$.

Згортаючи з g^{hk} та приймаючи до уваги (18), (19) будемо мати

$$\rho R_{ij} + c(\zeta)(\zeta_j \varphi_i - \varphi^\alpha \zeta_\alpha g_{ij}) = c'(\zeta_\alpha \zeta^\alpha g_{ij} - \zeta_i \zeta_j) + c(\zeta)\rho(n-1)g_{ij}.$$

Із останнього, враховуючи симетричність тензорів g_{ij} та R_{ij}, витікає

$$c(\zeta)(\zeta_j \varphi_i - \zeta_i \varphi_j) = 0.$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-62-74

Якщо $c(\zeta)=0$, то $\nabla_i \rho = 0$, і конциркулярне поле коваріантно стале, в протилежному випадку $\zeta_i = k\varphi_i$, де k - деякий інваріант. Таким чином, теорему доведено. Всі псевдоріманові простори V_3 задовольняють умові

$$C^h_{ijk} = 0. \tag{20}$$

Розглянемо простори $n>3$, в яких виконуються ці умови. З (18) переконаємось, що

$$\varphi^\alpha \nabla_\alpha R^\alpha_{\beta jk} = 0, \tag{21}$$

для всіх просторів, які дозволяють вектори φ^h що задають солітони Річчі.

З (21) для просторів $n > 3$, в яких виконуються (20), отримаємо

$$\nabla_k R\varphi_j - \nabla_j R\varphi_k = 0. \tag{22}$$

Таким чином, доведено теорему:

Теорема 5. Для конформно-пласких псевдоріманових просторів $V_n (n>3)$ градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі задовольняє умові

$$\nabla_i \varphi = f(R) \nabla_i R, \tag{23}$$

де $f(R)$ – деяка функція, що залежить від скалярної кривини простору V_n.

Рівняння (16), (17) представляють систему диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші відносно невідомих векторів φ_i та сталої λ. Дослідження її та умов інтегрування (19) методами, аналогічними розробленим в роботах [19, 20, 21], дають можливість довести, що максимальну кількість розв’язків системи $(n+1)$ дозволяють плаські простори. Не існує псевдоріманових просторів, які дозволяють n та $n-1$ розв’язок вказаної системи. Якщо кількість розв’язків більше одного, тобто крім рівняння (16), виконується

$$\nabla_j \Phi_i = \Lambda g_{ij} - R_{ij},$$

принаймні ще для одного деякого вектора Φ_i та сталої Λ, то

$$\nabla_j (\varphi_i - \Phi_i) = (\lambda - \Lambda) g_{ij}. \tag{24}$$

Таким чином, справджується:

Теорема 6. Якщо в псевдоріманову просторі V_n існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний.

Рівняння (24) задають збіжне конциркулярне векторне поле, яке або колінеарне векторному полю, що задає градієнтний солітон Річчі, або коваріантно стале.

Перший випадок проводить до гармонійних псевдоріманових просторів, тобто просторів, для яких $\nabla_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0$, а другий – дозволяє сформулювати наслідок.

Наслідок 1. Стала λ однозначно визначається для псевдоріманових просторів V_n, відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони річчі.discussion of the results of the study.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

В якості прикладу розглянемо тор. Тором називається поверхня, яка утворюється обертанням кола навколо осі, що лежить в її площині та її не перетинає. Якщо за X взяти широту тора, а за Y його довготу, то метрика тора запишеться в вигляді:

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2(1+\varepsilon cos(x))^2 \end{pmatrix},$$

тут a – радіус кола, b – віддаль від центра кола до осі обертання, $\varepsilon = a/b$ – ексцентриситет тору. Символом Христоффеля обчислимо за формулою

$$2\Gamma_{ijk}=\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij};\quad \Gamma_{ij}^k=g^{\alpha k}\Gamma_{ij\alpha}.$$

Отримаємо три відмінних від нуля коефіцієнти зв'язності

$$\Gamma_{22}^1=\frac{\sin x(1+\varepsilon\cos x)}{\varepsilon};\quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{-\varepsilon\sin x}{(1+\varepsilon\cos x)}.$$

Для тензора Рімана отримаємо

$$R_{221}^1=\frac{\cos x(1+\varepsilon\cos x)}{\varepsilon};\quad R_{221}^1=\frac{\varepsilon\cos x}{(1+\varepsilon\cos x)}.$$

Для тензора Річчі:

$$R_{11}=\frac{\varepsilon\cos x}{(1+\varepsilon\cos x)};\quad R_{22}=\frac{\cos x(1+\varepsilon\cos x)}{\varepsilon}.$$

З визначення коваріантної похідної та значень символів Христоффеля для тора

$$\gamma_{11}=\partial_1 u_1,\ \gamma_{12}=\frac{\varepsilon\sin x\cdot u_2}{(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{1}{2}(\partial_2 u_1+\partial_1 u_2),$$

$$\gamma_{22}=\partial_2 u_2-\frac{\sin x(1+\varepsilon\cos x)u_1}{\varepsilon}.$$

Враховуючи визначення спеціальних канонічних деформацій, будемо мати [3]

$$\partial_1 u_1=\lambda a^2-\frac{\varepsilon\cos x}{(1+\varepsilon\cos x)},$$

$$\partial_2 u_2=\frac{\sin x(1+\varepsilon\cos x)u_1}{\varepsilon}+\lambda b^2(1+\varepsilon\cos x)^2-\frac{\cos x(1+\varepsilon\cos x)}{\varepsilon},$$

$$\partial_2 u_1+\partial_1 u_2=\frac{-2\varepsilon\sin x}{(1+\varepsilon\cos x)}.$$

Наведемо приклад псевдоріманового простору $V_n(n>2)$, який дозволяє градієнтні векторні поля, що задають солітони Річчі, тобто допускають спеціальні канонічні деформації [16].

Розглянемо псевдоріманів простір V_3 з метрикою

$$ds^2=-(dx')^2+(x')^{2\cos(\Theta)}(dx^2)^2+(x')^{2\sin(\Theta)}(dx^3)^2.$$

Побудуємо векторне поле φ^i, що задає параболічний солітон Річчі $\varphi^i=(\varphi^1(x^1),0,0)$.

Обчислимо тензор Річчі псевдоріманового простору V_3:

$$R_{11} = \frac{1-\cos(\Theta)-\sin(\Theta)}{(x^1)^2}, \quad R_{22} = \frac{\cos(\Theta)(1-\cos(\Theta)-\sin(\Theta))}{(x')^{2(1-\cos(\Theta))}};$$

$$R_{33} = \frac{(1-\cos(\Theta)-\sin(\Theta)-1-\cos(\Theta))}{(x')^{2(1-\cos(\Theta))}}.$$

Скалярна кривина

$$R = \frac{-2(1-\cos(\Theta))(1-\sin(\Theta))}{(x')^2}.$$

В цьому просторі існує параболічний солітон Річчі, що задається векторним полем:

$$\varphi^h = \frac{(1-\cos(\Theta)-\sin(\Theta))}{x^1}\delta_1^h.$$

Якщо $\Theta = \pi$, то компоненти метричного тензора $g_{33} = 1$, і в просторі існує коваріантна стале векторне поле $\nu = (0,0,1)$, ортогональне гіперповерхні

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + \frac{1}{(x^1)^2}(dx^2)^2.$$

6 ВИСНОВКИ

Робота носить характер фундаментально-теоретичного дослідження. Отримані результати – це природний розвиток відомих результатів теорії деформацій псевдоріманових просторів. І тому мають теоретичну цінність з точку зору диференціальної геометрії. В той же час, вони можуть бути використані в теоретичний механіці та в загальній теорії відносності при моделюванні динамічних процесів.

Література

1. Джанелидзе Г. Ю. Признак Сен–Венана / Г. Ю. Джанелидзе // Труд. ЛПИ. –1958. – №192. – С. 7–20.
2. Азанов Н. П. Уравнения совместности Сен–Венана и Бельтрами–Митчелла в римановом пространстве / Н. П. Азанов // Тр. геом. Сем., Казан. Ун–т. – 1989. – №19. – С. 9–13.
3. Азанов Н. П. Определение вектора бесконечно малой деформации мембраны, натянутой на тор / Н. П. Азанов // Тр. геом. Сем., Казан.ун–т. – 1990. – №20. – С. 13–18.
4. Потапенко І. Канонічні деформації метрик псевдоріманового простору / І. Потапенко // XIX Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI–2019), Праці конференції, Київ. – 2019. – С. 263–265.
5. Безкоровайна Л. Л., Вашпанова Т. Ю. А–деформації поверхні зі стаціонарною довжиною LGT–ліній. Український математичний журнал. – 2010. – 62 (7). – С. 878–884.
6. Gavrilchenko M. L. Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds / M. L. Gavrilchenko, N. N. Kinzerska // Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ. – 1999. – P. 185–189.
7. Vasilenko A. T. Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution / A. T. Vasilenko, A. V. Lesechko // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – 79 (6). – P. 1458–1461.
8. Kiosak V. Mappings of Spaces with Affine Connection / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko // 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Procedings, Bratislava. – 2018. – P. 563–569.
9. Gover A. R. Detecting Einstein geodesics: Einstein metrics in projective and conformal geometry / A. R. Gover, H. R. Macbeth // Differential Geometry and its Application. – 2014. – 33. – P. 44–69.

10.Gover A. R., Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations / A. R. Gover, V. S. Matveev // Proceedings of the London Mathematical Society. – 2017. – 114 (2). – P. 242–292.
11.Kiosak V. A. On the conformal mappings of quasi–Einstein spaces / V.A. Kiosak // Journal of Mathematical Sciences. United States. – 2012. – 184. – P. 12–18.
12.Kiosak V. Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds / V. Kiosak, O. Savchenko, T. Shevchenko // AIP Conference Procedings. – 2018. – 2025, 08004(2018).
13.Kiosak V. Special Einstein's equations on Kahler manifolds / V. Kiosak, I. Hinterleitner // Archivum Mathematicum. – 2010. – 46 (5). – P. 333–337.
14.Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces / R.S. Hamilton // Math. and general relativity, Santa Cruz, CA.– 1986.– P. 237–262.
15.Chen B. Y. Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitions / B. Y. Chen // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2017.– 41 (2).– P. 239–250.
16.Kiosak V. φ(Ric)–Vector Fields on Conformally Flat Spaces / V. Kiosak, I. Hinterleitner // Proceedings of American Institute of Physics. – 2009. – 1191. – P. 98–103.
17.Kiosak V. φ(Ric)–Vector Fields in Riemannian Spaces / V. Kiosak, I. Hinterleitner //Archivum–mathematicum, Brno. – 2008. – №44. – P. 385–390.
18.Kirik B. Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields / B. Kirik, F. Zengin // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis.– 2015.– 31 (1).– P. 61–69.
19.Евтушик Л. О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна / Л. Евтушик, В. Киосак, Й. Микеш // Изв. Вузов. Матем. – 2010. – №8. – С. 36–41.
20.Kiosak V. There exist no 4–dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress–energy tensor / V. Kiosak, V. Matveev // Journal of Geometry and Physics. – 2014. – 78. – P. 1–11.
21.Киосак В. А. О степени геодезической подвижности римановых метрик / В. А. Киосак, В. С. Матвеев, Й. Микеш, И. Г. Шандра // Матем. заметки. – 2010. – 87 (4). – С. 628–629.

References

1. Dzhanelidze, G. Yu. (1958). Equations of Saint-Venant, Trud. LPI, 192, 7–20.
2. Azanov, N. P. (1989). Equations of Saint-Venant and Beltrami-Michell compatibility in a Riemannian space, Tr. Geom. Semin., Kazan University, Kazan, 19, 9–13.
3. Azanov, N. P. (1990). Determining the vector of an infinitesimal deformation of a membrane that is stretched over a torus. Tr. Geom. Semin., Kazan University, Kazan, 20, 13–18.
4. Potapenko, I. (2019). Canonical deformations of pseudo-Riemannian spaces. XIX International Conference DSMSI, Proceedings of Conference reports, Kyiv, 263–265.
5. Bezkorovaina, L. L., Vashpanova, T. Yu. (2010). A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. Ukr. Mat. Zh., 62 (7), 878–884.
6. Gavrilchenko, M. L., Kinzerska, N. N. (1999). Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds. Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ., 185–189.
7. Vasilenko, A. T., Lesechko, A. V. (1996). Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. Journal of Mathematical Sciences, 79 (6), 1458–1461.
8. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Procedings, Bratislava, 563–569.
9. Gover, A. R., Macbeth, H. R. (2014). Detecting Einstein geodesics: Einstein metrics in projective and conformal geometry. Differential Geometry and its Application, 33, 44–69.
10. Gover, A. R., Matveev, V. S. (2017). Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations. Proceedings of the London Mathematical Society, 114 (2), 242–292.
11. Kiosak, V. A. (2012). On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces. Journal of Mathematical Sciences. United States, 184, 12–18.
12. Kiosak, V., Savchenko, O., Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. AIP Conference Procedings, 2025, 08004(2018).
13. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2010). Special Einstein's equations on Kahler manifolds. Archivum Mathematicum, 46 (5), 333–337.

14. Hamilton, R. S. (1986). The Ricci flow on surfaces. Math. and general relativity, Santa Cruz, CA, 237–262.
15. Chen, B. Y. (2017). Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitions. Kragujevac Journal of Mathematics, 41 (2), 239–250.
16. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2009). φ(Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces. Proceedings of American Institute of Physics, 1191, 98–103.
17. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2008). φ(Ric)–Vector Fields in Riemannian Spaces. Archivum-mathematicum, Brno, 44, 385–390.
18. Kirik, B., Zengin, F. (2015). Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 31 (1), 61–69.
19. Evtushik, L., Kiosak, V., Mikesh, J. (2010). The mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto Einstein spaces. Russian Mathematics, 54 (8), 29–33.
20. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78, 1–11.
21. Kiosak, V. A., Matveev, V. S., Mikesh, J., Shandra, I. G. (2010). On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics., Mathematical Notes, 87(4), 586–587.

Вашпанова Ніна Володимирівна
Одеська національна академія харчових технологій, к.ф.-м.н., доцент
вул. Канатна, 112 Одеса, Україна 65039
vashanina@ukr.net
ORCID: 0000-0002-8639-8368
Подоусова Тетяна Юріївна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н.
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
tatyana_top@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9492-126X
Шевченко Тетяна Іванівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.т.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
shevtat11@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7304-1706

Для посилань:
Вашпанова Н. В. Умови Сен-Венана для псевдоріманових просторів / Н. В. Вашпанова, Т. Ю. Подоусова, Т. І. Шевченко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 62–74.

For references:
Vashpanova, N., Podousova, T., Shevchenko, T. (2019). Saint-Venant's conditions for pseudo-Reimannian spaces. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 62–74.