

УДК 620.193.4:624.012.45

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ КОЛИВАНЬ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ КОЛОНИ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ І ПЛАСТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БЕТОНУ

Фомін В. М.<sup>1</sup>, Фоміна І. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** В останні десятиріччя при проектуванні конструкцій став проводитися прямий динамічний розрахунок на сейсмічні впливи. Подібний розрахунок просторових каркасних залізобетонних конструкцій з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів є складним завданням. Для цих цілей розроблені програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій, засновані на методі скінчених елементів. При урахуванні нелінійних і пластичних властивостей матеріалів порядок системи розв'язувальних рівнянь методу скінчених елементів для складних споруд дуже високий. При цьому необхідно зробити розбиття балок і колон, що утворюють конструкцію, на велику кількість скінчених елементів, так як деформаційні властивості бетону різні в стислій і розтягнутої зонах, а також в зонах навантаження і розвантаження. У цій статті пропонується метод дослідження нелінійних коливань залізобетонної колони змінного перерізу, заснований на методі граничних елементів, який приводить до значно меншого об'єму обчислювальної роботи, а, отже, до більш простому аналізу результатів. Сегмент колони змінного перерізу в межах одного поверху представляє собою стержень постійного прямокутного перетину з постійним армуванням. Маса перекриттів будівлі представлена у вигляді системи матеріальних точок, розташованих на колоні. Передбачається, що дослідження коливань буде вестися покроковим методом. На кожному кроці проводиться визначення коефіцієнтів впливу. Вони істотно залежать від напружено-деформованого стану кожного зі стержнів колони на початку кроку. Для визначення коефіцієнтів впливу на підставі методу граничних елементів проводиться побудова фундаментальних розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь просторового вигину залізобетонного стержню відносно приростів прогинів стержню з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. Далі за допомогою системи основних рівнянь динаміки для зазначених матеріальних точок визначаються прирости реакцій колони по відношенню до цих точок. Потім визначаються прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень їх прискорень, швидкостей і переміщень.

**Ключові слова:** нелінійні і пластичні властивості бетону; метод граничних елементів; покроковий метод; динаміка каркасних будівель; імпульсний вплив.

## APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN INVESTIGATION OF VIBRATIONS OF A REINFORCED CONCRETE COLUMN OF VARIABLE CROSS-SECTION TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEAR AND PLASTIC PROPERTIES OF CONCRETE

V. Fomin<sup>1</sup>, I. Fomina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture



**Abstract:** Last decades, a direct dynamic analysis of seismic effects began to be applied at design of structures. Such a design of spatial frame reinforced concrete structures, taking into account the nonlinear work and plastic properties of materials, is a difficult task. For these purposes, software systems for nonlinear dynamic structural analysis based on the finite element method have been developed. When taking into account the nonlinear and plastic properties of materials, the order of resolving equation systems of the finite element method for complex structures is very high. In this case, it is necessary to divide the beams and columns forming the structure into a large number of finite elements, since the deformation properties of concrete are different in the compressed and stretched zones, as well as in the loading and unloading zones. This article proposes a method for studying the nonlinear vibrations of a reinforced concrete column of variable cross-section, based on the boundary element method, which leads to a significantly smaller amount of computational work, and, therefore, to a simpler analysis of the results. The segment column of variable cross-section within one floor is a rod of constant rectangular cross section with constant reinforcement. The mass of ceilings of the building is presented in the form of a system of material points located on the column. It is assumed that the study of vibrations will be carried out by step-by-step method. At each step, the determination of the coefficients of influence is carried out. They significantly depend on the stress-strain state of each of the column rods at the beginning of the step. To determine the influence coefficients on the basis of the boundary element method, the fundamental solutions of the Cauchy problem are constructed for the system of differential equations of the reinforced concrete rod spatial bending relative to the increments of the rod deflections taking into account the physical and geometric nonlinearities and plasticity of concrete. Then, using the system of basic equations of dynamics for the mentioned above material points, the increments of the column reactions with respect to these points are determined. Then, the increments of accelerations, velocities and displacements of material points are determined. The step ends with the calculation of new values of their accelerations, velocities and displacements.

**Keywords:** nonlinear and plastic properties of concrete; boundary element method; step by step method; dynamics of frame buildings; impulse effect.

## 1 ВСТУП

Розвиток динамічних методів розрахунку споруд пов'язаний з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій, фізичної нелінійності та пластичності матеріалів. При цьому використовується скінченно-елементна модель будівлі. Проте такий розрахунок є досить складним завданням. Для залізобетонних конструкцій це пов'язано з тим, що при обчисленні методом скінченних елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан в точках будівлі, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що приводить до розв'язання системи гігантських розмірів і великих обчислювальних і часових витрат.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В останні десятиліття при проектуванні конструкцій став поводитися прямий динамічний розрахунок на сейсмічні впливи [1-4]. Як вже помічалось вище подібний розрахунок просторових каркасних залізобетонних конструкцій з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів є досить складним завданням. Для цих цілей розроблені програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій, засновані на методі скінченних елементів [5-8]. При цьому доводиться проводити розбиття конструкції на велику кількість скінченних елементів, щоб врахувати різні деформаційні властивості бетону в зонах розтягування і стиснення, навантаження і розвантаження. У зв'язку з цим виникає необхідність у використанні альтернативних методів [9-12]. До них відноситься і метод граничних елементів [13-14], для застосування якого необхідна наявність диференціовальних рівнянь згину і методика побудови матриці фундаментальних рішень задачі Коші для цих рівнянь і матриці-стовпці приватних рішень, що залежать від заданого навантаження.

## 3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕНЬ

Метою роботи є побудова методу, що дозволяє провести дослідження коливань колони змінного перерізу (рис. 1,  $n$  - кількість поверхів), що моделює висотну будівлю, з використанням методу граничних елементів. Сегмент колони змінного перерізу в межах одного поверху представляє собою стержень постійного прямокутного перетину з постійним армуванням (номера стержнів проставлені в кільцях).

## 4 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети застосовано покроковий метод дослідження, теорію диференціальних рівнянь, теорію матриць, метод граничних елементів.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Маса перекриттів будівлі представлена у вигляді системи матеріальних точок  $m_k$  (зосереджених мас,  $k = 1, 2, \dots, n$ ), розташованих на колоні. Передбачається, що дослідження коливань буде вестися покроковим методом, при якому на кожному кроці система сил, прикладених до мас, отримує приріст  $\Delta P_i^{(k)}$  ( $k$  - номер поверху,  $i$  - номер осі  $x_i^{(k)}$ , якої паралельна сила,  $i = 2, 3$ ; сила  $P_1^{(k)}$  - вага матеріальної точки, в процесі руху не змінюється).

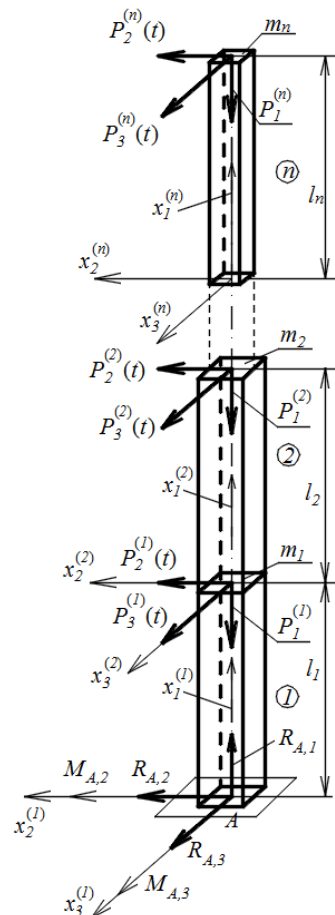


Рис. 1. Розрахункова схема колони

Складаючи систему основних рівнянь динаміки для матеріальних точок, отримуємо

$$m\Delta a = \Delta P + \Delta R, \quad (1)$$

де  $m$  – діагональна матриця мас точок (при цьому кожна маса записується двічі),  $\Delta a$  – вектор-стовпець, елементами якого є прирости проекції прискорень матеріальних точок на осі  $x_i^{(k)}$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta P$  – вектор, елементами якого є прирости величин сил  $P_i^{(k)}$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ), прикладених до вузлів,  $\Delta R$  – аналогічний вектор для приростів реактивних сил, що діють на маси з боку колони. При цьому елементи векторів  $\Delta a$ ,  $\Delta P$  і  $\Delta R$  нумеруються наступним чином:

$$j = 2(k-1) + i - 1, \quad (2)$$

де  $k$  – номер поверху,  $i$  – номер осі  $x_i^{(k)}$ , якої паралельна складова;  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 2, 3$ . На підставі методу лінійних прискорень [15] маємо

$$\Delta a = \frac{6}{(\Delta t)^2} \left[ \Delta v - V \Delta t - \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \right], \quad (3)$$

де  $\Delta t$  – часовий крок,  $\Delta v$  – вектор приростів перемещень мас,  $V$  і  $a$  – аналогічні вектори їх швидкостей і прискорень, визначені на попередньому кроці. Зауважимо, що вектор  $\Delta v$  пов'язаний з вектором  $\Delta R$  наступним чином:

$$\Delta v = -Y \Delta R, \quad (4)$$

де  $Y$  – матриця,  $j$ -м стовпцем якої є стовпець переміщень мас, викликаний одиничною статичною силою, яка прикладеної до маси  $m_k$  і паралельної осі  $x_i^{(k)}$  відповідно до формули (2).

Підставляючи (4) в (3), а потім (3) в (1), отримуємо

$$\Delta R = - \left[ I + \frac{6}{(\Delta t)^2} m Y \right]^{-1} \left\{ \frac{6}{(\Delta t)^2} m \left[ V \Delta t + a \frac{(\Delta t)^2}{2} \right] + \Delta P \right\}, \quad (5)$$

де  $I$  – одинична матриця порядку  $2n$ .

Визначивши з (5)  $\Delta R$ , знаходимо з (4) і (3)  $\Delta v$  і  $\Delta a$ , а потім з формул

$$\Delta V = \left( a + \frac{1}{2} \Delta a \right) \Delta t, \quad \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{3} \Delta a \right) (\Delta t)^2, \quad (6)$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень:

$$a_{нов} = a + \Delta a, \quad V_{нов} = V + \Delta V, \quad v_{нов} = v + \Delta v. \quad (7)$$

Таким чином, проблема дослідження руху мас звелася до визначення елементів матриці  $Y$ , тобто до визначення коефіцієнтів впливу на кожному кроці розрахунку. Вони істотно залежать від напружено-деформованого стану кожного зі стержнів колони, яке змінюється в процесі навантаження. Для визначення його використовуємо систему диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки в припущеннях кутів Крилова, що визначають зміну орієнтації прямокутної системи координат  $y_1, y_2, y_3$  ( $y_2, y_3$  – головні центральні осі інерції поперечного перерізу) щодо вихідної системи координат  $x_1, x_2, x_3$  (пов'язаної з недеформованому станом балки), з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. Ця система має такий вигляд [16]:

$$\sum_{r=1}^3 [X_{i,r}(s) \Delta \xi_r'' + Y_{i,r}(s) \Delta \xi_r' + Z_{i,r}(s) \Delta \xi_r + \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_k(s) \Delta F_k] = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (8)$$

з граничними умовами на лівому кінці

$$\sum_{r=1}^3 V_{i,r} \Delta \xi_r(0) + \sum_{r=1}^3 V_{i,r+3} \Delta \xi_r'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k} \Delta F_k + \Delta M_{o,i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (9)$$

де  $s$  – дугова координата поперечного перерізу балки,  $\Delta \xi$  – вектор з елементами

$$\Delta \xi_1 = \Delta \phi, \quad \Delta \xi_2 = \Delta \psi, \quad \Delta \xi_3 = \Delta \theta, \quad (10)$$

де  $\Delta \phi, \Delta \psi, \Delta \theta$  - прирости кутів Крилова, викликані приростами сили  $F$  і моменту  $M_0$ , прикладених до лівого кінця балки. Відсутні три граничних умови визначаються умовами закріплення балки. Метод побудови функцій  $X_{i,r}(s), Y_{i,r}(s), Z_{i,r}(s), \tilde{U}_k(s)$ , а також величин  $V_{i,r}, V_{i,r+3}, W_{i,k}$  ( $i, r, k = 1, 2, 3$ ) на кожному кроці покрокового методу докладно викладено в [16].

Так як для залізобетонних балок кути  $\phi, \psi, \theta$ , а також  $\phi', \psi', \theta'$  малі, то можна прийняти, що  $\cos \phi = \cos \psi = 1, \sin \phi = \phi, \sin \psi = \psi$ . Також можна знехтувати добутками малих величин. Формули для напрямних косинусів  $\alpha_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ортів осей  $y_1, y_2, y_3$

в системі координат  $x_1, x_2, x_3$  приймуть такий вигляд [16]:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= 1, & \alpha_{1,2} &= \phi, & \alpha_{1,3} &= -\psi; \\ \alpha_{2,1} &= -\phi, & \alpha_{2,2} &= 1, & \alpha_{2,3} &= \theta; \\ \alpha_{3,1} &= \psi, & \alpha_{3,2} &= -\theta, & \alpha_{3,3} &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

З рівняння [16]

$$\Delta x'_{C,i} = \Delta \alpha_{1,i} \quad (i=1,2,3),$$

де  $x_{C,i}$  ( $i=1,2,3$ ) - координати центра ваги перерізу і (3) впливає, що

$$\Delta x'_{C,2} = \Delta \phi, \quad \Delta x'_{C,3} = -\Delta \psi. \quad (12)$$

Тоді рівняння (1) і граничні умови (2) можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s)\Delta x'''_{C,2} - X_{i,2}(s)\Delta x'''_{C,3} + X_{i,3}(s)\Delta \theta'' + Y_{i,1}(s)\Delta x''_{C,2} - Y_{i,2}(s)\Delta x''_{C,3} + \\ + Y_{i,3}(s)\Delta \theta' + Z_{i,1}(s)\Delta x'_{C,2} - Z_{i,2}(s)\Delta x'_{C,3} + Z_{i,3}(s)\Delta \theta + \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}(s)\Delta F_k = 0 \quad (i=1,2,3); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_{i,1}\Delta x'_{C,2}(0) - V_{i,2}\Delta x'_{C,3}(0) + V_{i,3}\Delta \theta(0) + V_{i,4}\Delta x''_{C,2}(0) - V_{i,5}\Delta x''_{C,3}(0) + \\ + V_{i,6}\Delta \theta'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k}\Delta F_k + \Delta M_i(0) = 0 \quad (i=1,2,3). \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо рівність (2.28) [1] при  $s=0$  в наступному вигляді

$$\Delta Q_m(0) = -\sum_{k=1}^3 \beta_{k,m}(0)\Delta F_k \quad (m=1,2,3), \quad (15)$$

де  $\beta_{k,m}(0) = \alpha_{m,k}(0)$ ;  $k, m=1,2,3$ . Звідси слідує, що

$$\Delta F_m = -\sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0)\Delta Q_k(0) \quad (m=1,2,3), \quad (15a)$$

де  $\Delta Q_k(s)$  - прирости складових головного вектора внутрішніх зусиль в поперечному перерізі балки.

З урахуванням (15a) рівняння (4) можуть бути записані так

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s)\Delta x'''_{C,2} - X_{i,2}(s)\Delta x'''_{C,3} + X_{i,3}(s)\Delta \theta'' + Y_{i,1}(s)\Delta x''_{C,2} - Y_{i,2}(s)\Delta x''_{C,3} + Y_{i,3}(s)\Delta \theta' + \\ + Z_{i,1}(s)\Delta x'_{C,2} - Z_{i,2}(s)\Delta x'_{C,3} + Z_{i,3}(s)\Delta \theta = \sum_{m=1}^3 \tilde{U}_{i,m}\Delta Q_m(0) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\tilde{U}_{i,m} = \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$ ,

а граничні умови (5) - так

$$\begin{aligned} V_{i,1}\Delta x'_{C,2}(0) - V_{i,2}\Delta x'_{C,3}(0) + V_{i,3}\Delta \theta(0) + V_{i,4}\Delta x''_{C,2}(0) - V_{i,5}\Delta x''_{C,3}(0) + V_{i,6}\Delta \theta'(0) = \\ = \sum_{m=1}^3 \tilde{W}_{i,m}\Delta Q_m(0) - \Delta M_i(0) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\tilde{W}_{i,m} = \sum_{k=1}^3 W_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$ .

Введемо позначення

$$\begin{aligned} y_1 &= \Delta x_{C,2}(0), \quad y_2 = \Delta x_{C,3}(0), \quad y_3 = \Delta x'_{C,2}(0), \quad y_4 = \Delta x'_{C,3}(0), \quad y_5 = \Delta\theta(0), \\ y_6 &= \Delta x''_{C,2}(0), \quad y_7 = \Delta x''_{C,3}(0), \quad y_8 = \Delta\theta'(0). \end{aligned} \quad (18)$$

Крім того, через  $z_{n,k}(s)$  ( $n=1,2,3; k=1,2,\dots,8$ ) позначимо фундаментальну систему розв'язків задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь, що відповідає системі (7). Це означає, що  $z_{1,k}(s) = \Delta x_{C,2}(s)$ ,  $z_{2,k}(s) = \Delta x_{C,3}(s)$ ,  $z_{3,k}(s) = \Delta\theta(s)$  ( $k=1,2,\dots,8$ ), при виконанні наступних умов:

$$y_p = \delta_{p,k} \quad (p=1,2,\dots,8),$$

де  $\delta_{p,k}$  – символ Кронекера. Потім через  $z_{u,r,m}(s)$  ( $r,m=1,2,3$ ) позначимо множину частинних розв'язків  $\Delta x_{u,C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{u,C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta_u(s)$  системи (7) при нульових початкових умовах і при стовпці правих частин, що складається з елементів  $\tilde{U}_{i,m}$  ( $m=1,2,3$ ).

Для наближеної побудови цих рішень розіб'ємо балку по довжині на ряд ділянок, у межах кожного з яких коефіцієнти  $X_{i,r}(s)$ ,  $Y_{i,r}(s)$ ,  $Z_{i,r}(s)$  вважатимемо постійними і рівними  $X_{i,r}(s_m)$ ,  $Y_{i,r}(s_m)$ ,  $Z_{i,r}(s_m)$  ( $s_m$  – дугова координата початку ділянки,  $m$  - його номер) відповідно. Застосовуючи теорію лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, знаходимо рішення  $\Delta x_{C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta(s)$  на першій ділянці при відповідних початкових умовах. Потім знаходимо вирішення цієї системи на другій ділянці, використовуючи в якості початкових умов значення функцій  $\Delta x_{C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta(s)$  і їх похідних в кінці першої ділянки і т.д.

Вирішуючи систему алгебраїчних рівнянь (8) щодо  $\Delta\theta'(0)$ ,  $\Delta x''_{C,2}(0)$  і  $\Delta x''_{C,3}(0)$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta x''_{C,2}(0) &= \tilde{V}_{1,1} \Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{1,2} \Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{1,3} \Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+3} \Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+6} \Delta Q_m(0); \\ \Delta x''_{C,3}(0) &= \tilde{V}_{2,1} \Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{2,2} \Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{2,3} \Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+3} \Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+6} \Delta Q_m(0); \\ \Delta\theta'(0) &= \tilde{V}_{3,1} \Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{3,2} \Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{3,3} \Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+3} \Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+6} \Delta Q_m(0). \end{aligned} \quad (19)$$

Рішення однорідної системи, що відповідає системі (7) (в подальшому будемо називати її однорідної системою (7)), а також їх похідні можуть бути виражені через фундаментальні рішення задачі Коші наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta x_{C,2}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{1,j}(s), \quad \Delta x'_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{1,j}(s), \quad \Delta x''_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{1,j}(s); \\ \Delta x_{C,3}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{2,j}(s), \quad \Delta x'_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{2,j}(s), \quad \Delta x''_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{2,j}(s); \\ \Delta\theta(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{3,j}(s), \quad \Delta\theta'(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{3,j}(s). \end{aligned} \quad (20)$$

Для знаходження  $\Delta M_i(s)$  і  $\Delta Q_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) використовуємо формули (2.38) і (2.38a) [16]:





$$\Delta M_i = \sum_{r=1}^3 (M_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{r=1}^3 (M_i)_{r+3}^{(3)} \Delta \xi'_r + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} \Delta F_k ;$$

$$\Delta Q_i = \sum_{r=1}^3 (Q_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{r=1}^3 (Q_i)_{r+3}^{(3)} \Delta \xi'_r + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} \Delta F_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

З (6) отримуємо

$$\Delta M_i(s) = \sum_{r=1}^3 (M_i)_r^{(3)}(s) \Delta \xi_r(s) + \sum_{r=1}^3 (M_i)_{r+3}^{(3)}(s) \Delta \xi'_r(s) - \sum_{m=1}^3 (M_i^*)^{(4)}(s) \Delta Q(0)_m \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Delta Q_i(s) = \sum_{r=1}^3 (Q_i)_r^{(3)}(s) \Delta \xi_r(s) + \sum_{r=1}^3 (Q_i)_{r+3}^{(3)}(s) \Delta \xi'_r(s) - \sum_{m=1}^3 (Q_i^*)^{(4)}(s) \Delta Q(0)_m \quad (i = 1, 2, 3),$$
(21)

де

$$(M_i^*)^{(4)}(s) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0) (M_i)_k^{(4)}(s), \quad (Q_i^*)^{(4)}(s) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0) (Q_i)_k^{(4)}(s). \quad (22)$$

Використовуючи (2а) і (3а), формули (12) можна записати так:

$$\Delta M_i(s) = (\tilde{M}_i)_1(s) \Delta x'_2(s) - (\tilde{M}_i)_2(s) \Delta x'_3(s) + (\tilde{M}_i)_3(s) \Delta \theta(s) +$$

$$+ (\tilde{M}_i)_4(s) \Delta x''_2(s) - (\tilde{M}_i)_5(s) \Delta x''_3(s) + (\tilde{M}_i)_6(s) \Delta \theta'(s) - \sum_{m=1}^3 (\tilde{M}_i)_m(s) \Delta Q_m(0) \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\Delta Q_i(s) = (\tilde{Q}_i)_1(s) \Delta x'_2(s) - (\tilde{Q}_i)_2(s) \Delta x'_3(s) + (\tilde{Q}_i)_3(s) \Delta \theta(s) +$$

$$+ (\tilde{Q}_i)_4(s) \Delta x''_2(s) - (\tilde{Q}_i)_5(s) \Delta x''_3(s) + (\tilde{Q}_i)_6(s) \Delta \theta'(s) - \sum_{m=1}^3 (\tilde{Q}_i)_m(s) \Delta Q_m(0) \quad (i = 1, 2, 3).$$
(23)

Тут

$$(\tilde{M}_i)_r(s) = (M_i)_r^{(3)}(s), \quad (\tilde{Q}_i)_r(s) = (Q_i)_r^{(3)}(s) \quad (i = 1, 2, 3; r = 1, 2, \dots, 6),$$

$$(\tilde{M}_i)_m(s) = (M_i^*)^{(4)}(s), \quad (\tilde{Q}_i)_m(s) = (Q_i^*)^{(4)}(s) \quad (i, m = 1, 2, 3).$$

Для кожного зі стержнів колони можна записати наступну рівність

$$\Delta w(s) = \Delta w_{одн}(s) + \Delta w_{\psi}(s). \quad (24)$$

В цієї рівності  $\Delta w_{одн}(s)$  – вектор з елементами

$$\Delta w_{одн,1}(s) = \Delta x_{C,2}(s), \quad \Delta w_{одн,2}(s) = \Delta x_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,3}(s) = \Delta x'_{C,2}(s),$$

$$\Delta w_{одн,4}(s) = \Delta x'_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,5}(s) = \Delta \theta(s), \quad \Delta w_{одн,6}(s) = \Delta x''_{C,2}(s),$$

$$\Delta w_{одн,7}(s) = \Delta x''_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,8}(s) = \Delta \theta'(s),$$
(25)

отриманими з рішення однорідної системи (7), а  $\Delta w_{одн}(s)$  – вектор з тими ж елементами, отриманими з приватного рішення  $\Delta x_{\psi,C,2}(s), \Delta x_{\psi,C,3}(s), \Delta \theta_{\psi}(s)$  системи (7) при нулевих початкових умовах. Очевидно,

$$\Delta w_{\psi,j}(s) = \sum_{m=1}^3 z_{\psi,j,m}(s) \Delta Q_m(0) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (26)$$



Тут  $z_{q,j,m}(s)$  – частинний розв’язок системи (7) при нульових початкових умовах і з правою частиною, яка дорівнює  $\tilde{U}_{i,m}$  ( $i=1,2,3$ ).

Представимо  $\Delta w_{одн}(s)$  в наступному вигляді

$$\Delta w_{одн}(s) = A(s)\Delta w(0), \quad (27)$$

тобто

$$\Delta w_{одн,i} = \sum_{j=1}^8 A_{ij}(s)\Delta w_j(0).$$

З формул (11) отримуємо

$$\begin{aligned} A_{1,j} &= z_{1,j}(s), \quad A_{2,j} = z_{2,j}(s), \quad A_{3,j} = z'_{1,j}(s), \quad A_{4,j} = z'_{2,j}(s), \\ A_{5,j} &= z_{3,j}(s), \quad A_{6,j} = z''_{1,j}(s), \quad A_{7,j} = z''_{2,j}(s), \quad A_{8,j} = z'_{3,j}(s) \quad (j=1,2,\dots,8). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким чином,  $\Delta w(s)$  представляється в наступному вигляді

$$\Delta w(s) = A(s)\Delta w(0) + \Delta w_q(s). \quad (29)$$

Для побудови першого стовпчика матриці  $Y$  чинимо так: покладемо  $\Delta P_2^{(1)} = 1$ ,  $\Delta P_3^{(1)} = 0$ ,  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i=2,3; k=2,\dots,n$ ). З умов рівноваги колони визначаємо  $\Delta R_{A,i}$  ( $i=1,2,3$ ),  $\Delta M_{A,i}$  ( $i=2,3$ ). У формулах (8) і (9) для стержня 1 вважаємо  $\Delta F_i^{(1)} = \Delta R_{A,i}$  ( $i=1,2,3$ ),  $\Delta M_{0,i}^{(1)}(0) = \Delta M_{A,i}$  ( $i=2,3$ ), ( $\Delta M_{A,i}$  дорівнює нулю при навантаженні на колону, представленою на рис. 1). Крім того, з умов закріплення в точці  $A$  слідує

$$\begin{aligned} \Delta w_1^{(1)}(0) &= \Delta x_{C,2}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_2^{(1)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_3^{(1)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(1)}(0) = 0, \\ \Delta w_4^{(1)}(0) &= \Delta x_{C,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_5^{(1)}(0) = \Delta \theta^{(1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Значення  $\Delta w_6^{(1)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(1)}(0)$ ,  $\Delta w_7^{(1)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(1)}(0)$ ,  $\Delta w_8^{(1)}(0) = \Delta \theta^{(1)}(0)$  визначаються з рівностей (15) і (19). Проводячи далі обчислення відповідно до формулами (20) - (29) визначаємо значення елементів вектора  $\Delta w^{(1)}(s)$  ( $0 \leq s \leq l_1$ ) для стержня 1.

З умови жорсткого з’єднання стержнів 1 і 2 отримуємо  $\Delta w_r^{(2)}(0) = \Delta w_r^{(1)}(l_1)$  ( $r=1,2,\dots,5$ ). Так само як і для стержня 1,  $\Delta w_6^{(2)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(2)}(0)$ ,  $\Delta w_7^{(2)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(2)}(0)$ ,  $\Delta w_8^{(2)}(0) = \Delta \theta^{(2)}(0)$  визначаються з рівностей (15) і (19). Потім за формулами (20) - (29) визначаються значення елементів вектора  $\Delta w^{(2)}(s)$  ( $0 \leq s \leq l_2$ ). У формулах (8) і (9) для стержня 2 вважаємо  $\Delta F_1^{(2)} = \Delta R_{A,1} - \Delta P_1^{(1)}$ ,  $\Delta F_i^{(2)} = \Delta R_{A,i} + \Delta P_i^{(1)}$  ( $i=2,3$ ),  $\Delta M_{0,i}^{(2)}(0) = \Delta M_i^{(1)}(l_1)$  ( $i=1,2,3$ ) при цьому величини  $\Delta M_i^{(1)}(l_1)$  ( $i=2,3$ ) обчислюються за формулою (23). Далі продовжуємо таким же чином, поки не визначимо  $\Delta w_r^{(k)}(l_k)$  ( $r=1,2,\dots,8$ ) для усіх  $k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ). Елементами першого стовпчика матриці  $Y$  є величини  $\Delta x_i^{(k)}(l_k)$  ( $k=1,2,\dots,n; i=2,3$ ) (тобто величини  $\Delta w_{i-1}^{(k)}(l_k)$ ), впорядковані відповідно до формули (2).

Для побудови другого стовпця матриці  $Y$  прикладаємо наступне навантаження:  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i=2,3; k=1,2,\dots,n$ ) за винятком  $\Delta P_3^{(1)}$ , яке дорівнює одиниці. Далі діємо так само, як діяли при побудові першого стовпця матриці  $Y$ . Для побудови елементів

третього стовпця матриці  $Y$  вважаємо  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ) за винятком  $\Delta P_2^{(2)} = 1$  і т.д. і т.п. поки не побудуємо всі стовпці матриці  $Y$ . Після побудови матриці  $Y$  з (5) визначаємо  $\Delta R$ , потім з (4) і (3) знаходимо  $\Delta v$  і  $\Delta a$ . За формулами (6) обчислюємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень відповідно за формулами (7).

**Приклад.** До двоступеневої залізобетонної колони з двома зосередженими масами  $M_1$  і  $M_2$  величиною  $m_1 = m_2 = 60T$  в момент часу  $t = 0$  прикладаються два синусоїдальних імпульсу: до маси  $M_1 - F_3(t)$  в напрямку осі  $x_3$  і до маси  $M_2 - F_2(t)$  в напрямку осі  $x_2$  (рис. 2а). Графік їх зміни наведено на рис. 2б ( $F$  у  $\kappa H$ ,  $t$  у секундах). Довжини ділянок колони  $l_1 = l_2 = 5m$ . Поперечні перерізи ділянок представляють собою квадрати зі сторонами  $0,5m$  і  $0,4m$ . Армування – дванадцять стержнів діаметром  $10mm$ , розташованих симетрично як щодо осі  $x_2$ , так і щодо осі  $x_3$ , матеріал – сталь марки А-III. Характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 MPa$ ,  $R_c = 19 MPa$ ,  $R_p = 1,9 MPa$ .

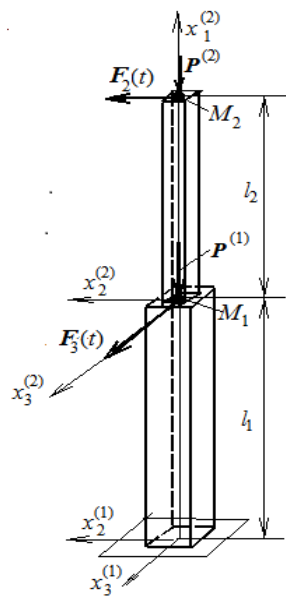


Рис. 2а. Навантаження на колону

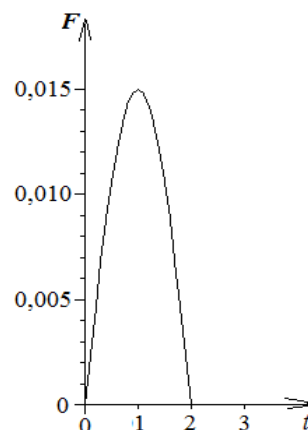


Рис. 2б. Графік імпульсу

Після впливу імпульсів колону починає здійснювати вільні коливання. Використовуючи алгоритм, викладений вище, для кожної з ділянок колони і урахуваючи умови їх сполучення, а також (21) - (27), будуємо графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  мас  $M_1$  і  $M_2$ . Ці графіки наведені на рис. 3 і 4. Помітно накопичення залишкових деформацій.

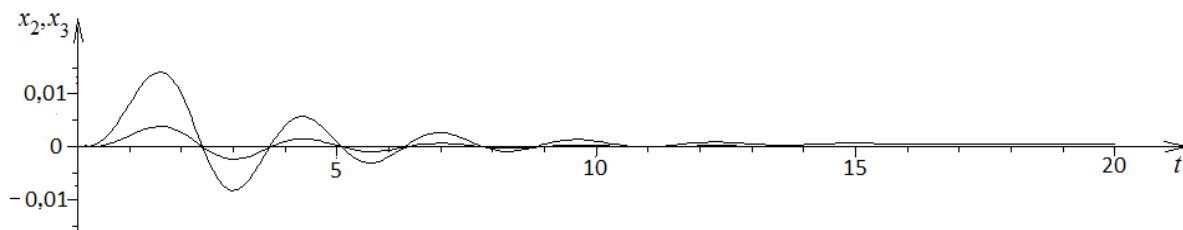


Рис. 3. Графік зміни координат зосередженої маси  $M_1$

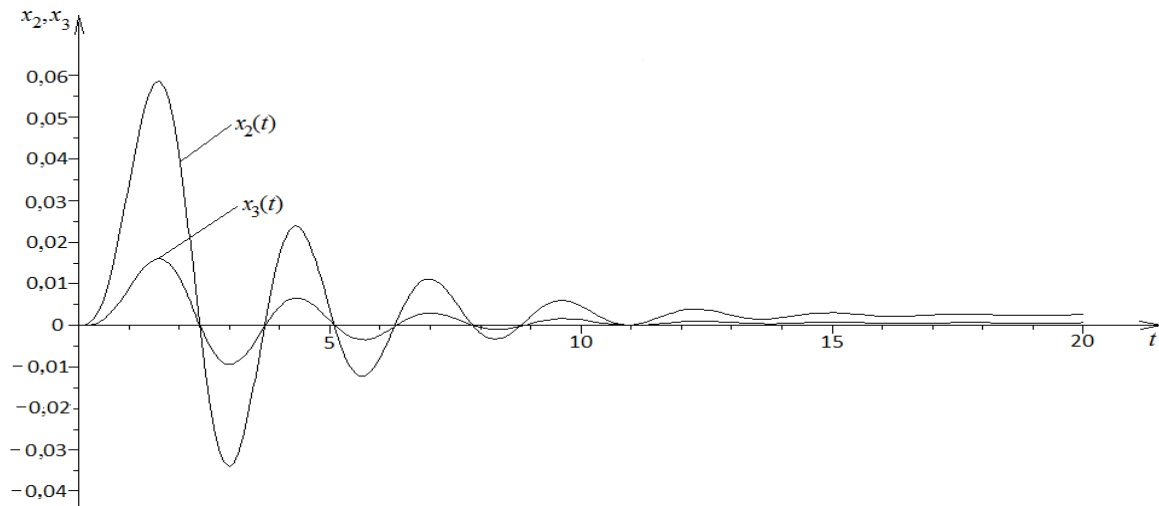


Рис. 4. Графік зміни координат зосередженої маси  $M_2$

## 6 ВИСНОВКИ

Запропоновано метод дослідження динамічних задач згину залізобетонних колон, заснований на методі граничних елементів, тобто без використання методу скінченних елементів, який приводить до вирішення багаторозмірних лінійних алгебраїчних систем, а, отже, до появи похибок розрахунку.

Запропонований метод може бути використаний при побудові методів розв'язання динамічних задач для залізобетонних каркасних споруд будь-якої форми і будь-яких конструктивних особливостей.

## Література

1. Azuhata T. Seismic performance estimation of asymmetric buildings based on the capacity spectrum method / T. Azuhata, T. Saito, M. Takayama, K. Nagahara // 12wcee-2000. 2322. p. 1-8.
2. Bertero R. D. Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach / R. D. Bertero, V. V. Bertero // Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 31,3, Mar. 2002. p. 627-652. [doi.org/10.1002/eqe.146](https://doi.org/10.1002/eqe.146)
3. Fajfar P. A. Nonlinear Analysis Method for Performance Based Seismic Design / P. Fajfar // Earthquake Spectra, Vol. 16, No. 3, pp. 573-592. August 2000. [doi.org/10.1193/1.1586128](https://doi.org/10.1193/1.1586128)
4. Немчинов Ю. И. Расчет колебаний зданий и прочности железобетонных стен на заданные акселерограммы / Ю. И. Немчинов, Н. Г. Марьенков // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2013, випуск № 49. С.15-25.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). / Ю. И. Немчинов // – Киев: Будівельник, 1980. 232 с.
6. ПК ЛИРА. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. Справочно-теоретическое пособие под ред. академика АИИ Украины А.С. Городецкого. – Киев – М.: 2003. 464с.
7. Городецкий А. С. Прямой динамический расчет зданий на сейсмические воздействия с учетом физически нелинейной работы материала конструкций / А. С. Городецкий, Ю. Д. Гераймович // Будівельні конструкції, 2006, випуск 64. С. 80-87.
8. Nakasone Y. Engineering analysis with ANSYS software / Y. Nakasone, S. Yoshimoto, T. A. Stolarski // Oxford, Burlington, MA : Butterworth-Heinemann, 2006. 456 p.
9. Freeman S. A. Prediction of Response of Concrete Buildings to Severe Earthquake Motion. / S. A. Freeman // Douglas McHenry International Symposium on Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, Michigan., 1978, P. 589-605.

10. Fujii K. Simplified nonlinear analysis procedure for single-story asymmetric buildings / K. Fujii, Y. Nakano, Y. Sanada // Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, Vol. 4, № 2, 2004. [doi.org/10.5610/jaee.4.2\\_1](https://doi.org/10.5610/jaee.4.2_1)
11. Requena M. Evaluation of a simplified method for the determination of the non linear seismic response of RC frames/ M. Requena, A. G. Ayala // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000: paper № 2109.
12. Nagao T. Case Studios on Performance Based Seismic Design Using Capacity Spectrum Method / T. Nagao, H. Mukai, D. Nishikawa // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000, paper № 0694.
13. Оробей В. Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем / В. Ф. Оробей, А. В. Ковров // Применение метода граничных элементов. Одесса, 2004. 123 с.
14. Оробей В. Ф. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов // Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та, Инженерно-строительный журнал, №4 (22), СПб, 2011. С. 33-39. [doi.org/10.5862/МСЕ.22.6](https://doi.org/10.5862/МСЕ.22.6)
15. Ньюмарк Н. Основы сейсмостойкого строительства / Н. Ньюмарк, Э. Розенблюэт // М.: Стройиздат, 1980. 344 с.
16. Фомин В. М. Построение дифференциальных уравнений пространственного железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В. М. Фомин // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну, Технічні науки, 2017, № 1 (106). С. 43-48.

## References

1. Azuhata, T., Saito, T., Takayama, M., Nagahara, K. (2000). Seismic performance estimation of asymmetric buildings based on the capacity spectrum method, 12, 1-8.
2. Bertero, Raul D., Bertero, Vitelmo V. (2002). Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 31, 3, 627-652. [doi.org/10.1002/eqe.146](https://doi.org/10.1002/eqe.146)
3. Fajfar, P. (2000). A Nonlinear Analysis Method for Performance Based Seismic Design, Earthquake Spectra, 16 (3), 573-592. [doi.org/10.1193/1.1586128](https://doi.org/10.1193/1.1586128)
4. Nemchinov, U. I. Marienkov, N. G. (2013). Analysis of building vibrations and the strength of reinforced concrete walls at specified accelerograms, Bulletin of Odessa state Academy of Civil Engineering and Architecture – Odessa: Vneshreclamservice, 49, 15-25.
5. Nemchinov U. I. (1980). Analysis of space constructions (Finite Element Method).– Kiev: Budivel'nik, 232.
6. PC LIRA. (2003). Software package for structural analysis and design. Reference-theoretical manual, ed. by academician of Ukrainian AES A.S. Gorodetsky. – Kiev – M.: 46.
7. Gorodetsky, A. S., Geraimovich, U. D. (2006). Direct dynamic analysis of buildings for seismic effects, taking into account physically non-linear work of the structural material, Budivelny konstruktzii, 64, 80-87.
8. Nakasone, Y., Yoshimoto, S., Stolarski, T. A. (2006). Engineering analysis with ANSYS software. Oxford, Burlington, MA : Butterworth-Heinemann, 456.
9. Freeman, S. A. (1978). Prediction of Response of Concrete Buildings to Severe Earthquake Motion. Douglas McHenry International Symposium on Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 589-605.
10. Fujii, K., Nakano, Y., Sanada, Y. (2004). Simplified nonlinear analysis procedure for single-story asymmetric buildings. Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, 4 (2). [doi.org/10.5610/jaee.4.2\\_1](https://doi.org/10.5610/jaee.4.2_1)
11. Requena, M., Ayala, A. G. (2000). Evaluation of a simplified method for the determination of the non linear seismic response of RC frames. Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2109.
12. Nagao, T., Mukai, H., Nishikawa, D. (2000). Case Studios on Performance Based Seismic Design Using Capacity Spectrum Method. Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 0694.

13. Orobey, V. F., Kovrov, A. V. (2004). The solution of problems of statics, dynamics and stability of rod systems. Application of the boundary element method. Odessa, 123.
14. Orobey, V. F., Sur'yaninov, N. G. (2011). Osnovnye polozeniya chislenno-analiticheskogo varianta MGE'. Trudy Sankt-Peterburgskogo politekhnich. un-ta, Inzhenerno-stroitel'ny'j zhurnal, 4 (22), 33-39. [doi.org/10.5862/MCE.22.6](https://doi.org/10.5862/MCE.22.6)
15. Newmark, N. M., Rosenblueth, E. (1971). Fundamentals of earthquake engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 640.
16. Fomin, V. M. (2017). Construction of differential equations of spatial bending of reinforced concrete beams and frames taking into account physical and geometric non-linearities and plasticity of concrete. Bulletin of Kiev National University of technology and design, Technichni nauki, 1 (106), 43-48.

**Фомін Володимир Михайлович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
vmfomin39@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-4814-6415

**Фоміна Інна Петрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
fomina@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0001-7366-1537

*Для посилань:*

Фомін В. М. Застосування методу граничних елементів при дослідженні коливань залізобетонної колони змінного перерізу з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону / В. М. Фомін, І. П. Фоміна // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 55–67.

*For references:*

Fomin, V., Fomina, I. (2020). Application of the boundary element method in investigation of vibrations reinforced concrete column of variable cross-section taking into account the nonlinear and plastic properties of concrete. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (1), 55 – 67