

МЕТОД РОЗРАХУНКУ СТРИЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА КОЛИВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

¹Крутий Ю.С., д.т.н., професор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹Вандинський В.Ю., аспірант,
vandynsky@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4812-7361

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, г. Одеса, 65029, Україна

Анотація. Робота присвячена дослідженню вільних коливань з врахуванням власної ваги вертикальних стрижневих конструкцій, що в розрахунковій схемі зводяться до стрижня, жорстко закріпленого нижнім кінцем та шарнірно опертого верхнім. Під час досліджень використовувався авторський метод, що ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння коливань в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Для заданих граничних умов у загальному вигляді у безрозмірному форматі виписано частотне рівняння та визначено метод пошуку його коренів. Визначення частот власних коливань зводиться до знаходження із частотних рівнянь відповідних безрозмірних коефіцієнтів. Представивши коефіцієнт коливань як змінну функцію від безрозмірного параметру, що характеризує механічну систему, і обчисливши масив даних на допустимому проміжку значень параметру, коефіцієнт коливань апроксимовано поліномом. Як результат, отримано кінцеві формули для обчислення коефіцієнту коливань, а, отже, і частоти власних коливань для стрижня із будь-якими фізико-механічними характеристиками.

Виконано розрахунок частоти власних коливань конструкції сталевого ланцюгового райзера (СЛР), приведеного до заданої стрижневої моделі. При проектуванні райзерів до уваги окрім іншого до уваги беруть характеристики внутрішнього потоку рідини, вібрації обладнання. Однак обов'язковим в практиці динамічних розрахунків конструкцій залишається дослідження спектру частот їх власних коливань. Оскільки такі конструкції, як правило, мають досить значну висоту, питання врахування власної ваги при їх проектуванні є досить важливим аспектом. Розглянуто приклад в якому авторським методом обчислено перших три частоти коливань. Порівнявши їх з відомими формулами для невагомих стрижнів, встановлено, що врахування власної ваги знижує значення відповідних частот. Похибка значень для першої частоти є найбільшою і становить 15%.

Найбільша відмінність між відповідними частотами власних коливань при врахуванні власної ваги досягається при критичному, з умов стійкості, значенню поздовжнього навантаження.

Ключові слова: частота коливань, вільні коливання, стрижень сталого перетину, власна вага, аналітичні розрахунки.

Вступ. При проектуванні конструкцій необхідно враховувати всі можливі впливи, яким вони можуть піддаватися в процесі зведення та експлуатації. Більшість з цих впливів носять динамічний характер. Це питання стає дедалі актуальнішим через поширеність висотних будівель, розробки методів мінімізації матеріаломісткості конструкцій та забудову областей сейсмічної активності.

Оцінка динамічних параметрів конструкції може бути виконана на основі аналізу таких характеристик, як частоти і форми власних коливань. Необхідність в їх визначенні виникає і при аналізі динамічної поведінки конструкції безпосередньо при дії змінних навантажень. Якщо при проектуванні конструкції або споруди є можливість оцінити спектр її власних частот, то можна з великою ймовірністю прогнозувати ризик виникнення резонансів у відомому діапазоні частот зовнішніх впливів.

Досліджуючи конструкцію в ненавантаженому стані за значеннями власних частот і форм коливань, можна зробити висновок про її жорсткість, працездатність, оцінити коректність прийнятих конструктивних рішень. Саме тому завдання визначення зазначених характеристик є актуальною науковою і практичною проблемою.

Аналіз останніх публікацій. Велика кількість сучасних публікацій присвячено вивченню згинних коливань різного типу стрижневих конструкцій з врахуванням дії поздовжньої сили. Так, в роботі [1] вивчаються згинні коливання балки сталого перетину за різних граничних умов та поздовжніх навантажень. В основу дослідження покладено енергетичний метод. Стаття [2] описує дослідження випадку коли поздовжня осьова сила набуває різних значень у різних частинах балки. Для різних комбінацій граничних умов обраховано перші три частоти власних коливань. Автори [3] вивчають коливання каркасних конструкцій з урахуванням впливу осьового навантаження. Власні частоти каркасних конструкцій отримано шляхом розв'язку диференційного рівняння, записаного для еквівалентного стрижня, чия жорсткість і маса повинні бути рівномірно розподілені по довжині.

Публікація [4] присвячена експериментальному вивченню впливу осьової сили на частоту коливань стрижня. Дана робота фактично є спробою встановити зв'язок між теоретичними моделями і самим явищем, яке має місце в реальному світі. Автори [5] розраховували власні частоти закріпленого стрижня з масою на вершині, прикладеною з ексцентриситетом. Також враховується лінійно змінна осьова сила, що представляється власною вагою стрижня. У статті [6] вивчаються коливання консольної колони, що знаходиться під впливом стискаючого навантаження. Гранична задача тут сформульована на основі принципу Гамільтона і теорії Тимошенко. Робота [7] присвячена вивченню згинальних коливань споруд з урахуванням власної ваги. Виписано відповідне диференціальне рівняння коливань в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Для вирішення задачі прийнята наближена форма деформованої вісі консолі.

Вертикальний стрижень сталого перетину жорстко закріплений нижнім кінцем, та шарнірно оперний верхнім зустрічається у науковій літературі при розрахунках бурових колон, збірних залізобетонних колон промислових будівель. Досить поширеним в зарубіжній літературі є розрахунок на коливання сталевих ланцюгових райзерів (steel catenary riser) плаваючих газо- та нафтовидобувних платформ, що виконуються з використанням комп'ютерного [8-10] та експериментального моделювання [11].

Загальним для перерахованих публікацій є той факт, що точні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь коливань зі змінними коефіцієнтами не наводяться. У всіх таких випадках використовуються наближені методи.

Для спрощення розрахунків часто в наукових публікаціях поздовжня сила приймається постійною по висоті конструкції [12, 13]. Однак в реальності поздовжня сила в різних перерізах приймає різні значення: чим вище конструкція, тим більш нерівномірним за висотою буде розподіл стискаючого навантаження. Особливо актуальними є дослідження коливань висотних та габаритних об'єктів. Прикладами таких споруд є багатопверхові будинки, колони каркасних будівель, промислові споруди (димарі, водонапірні вежі, решітчасті щогли), бурові стовпи, опор вітряків, антени тощо.

Однією з найпоширеніших розрахункових схем при дослідженні згинних коливань споруд та конструкцій є стрижень сталого перетину, навантажений змінною поздовжньою силою, представленою власною вагою. Для такого фізичного явища математичною моделлю є диференціальне рівняння зі змінними параметрами [14]. Зрозуміло, що найбільш повну та якісну оцінку механічної системи можна отримати лише на основі точного розв'язку диференціального рівняння. Такий розв'язок було отримано у публікації [15] і пізніше використано для дослідження коливань шарнірно закріплених конструкцій з урахуванням власної ваги [16].

Метою даної роботи є дослідження згинних коливань з врахуванням власної ваги стрижневих вертикальних конструкцій, що у розрахунковій схемі зводяться до стрижня сталого перетину, жорстко закріпленого нижнім кінцем та шарнірно опертим зверху.

Основні позначення та рівняння коливань. Загальна схема коливань вертикального стрижня закріпленого нижнім кінцем та шарнірно опертого верхнім показано на рис. 1. На рис. 2 показано зовнішні та внутрішні сили, що діють на елемент стрижня.

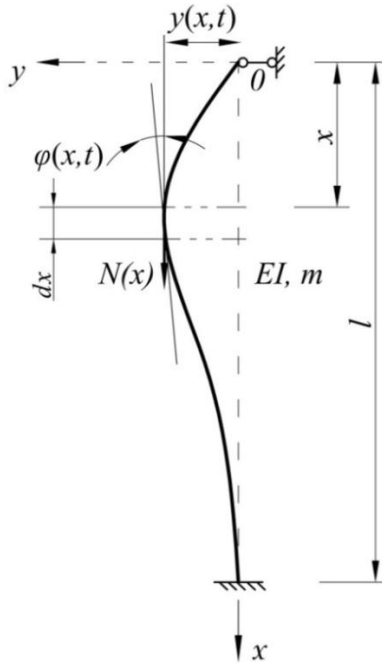


Рис. 1. Згинні коливання стрижня з врахуванням власної ваги

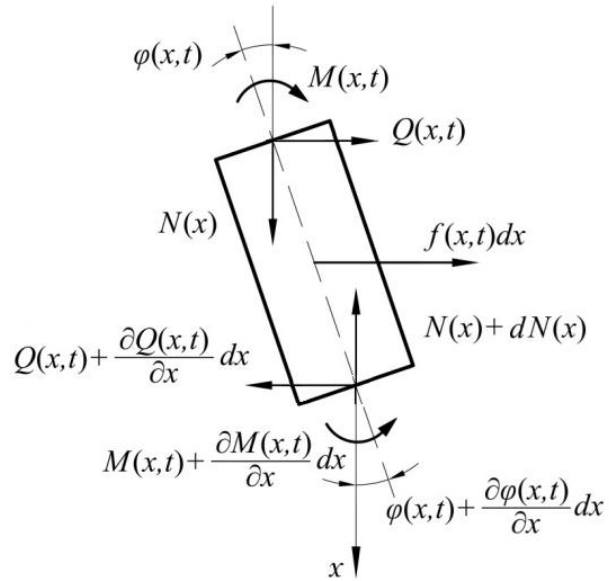


Рис. 2. Внутрішні зусилля та зовнішні сили, що діють на елемент стрижня

Список позначень:

EI – згинна жорсткість стрижня;

m – інтенсивність розподіленої маси (власної ваги) стрижня;

$N(x) = qx$ – змінна поздовжня (стискаюча) сила, де q – вага одиниці стрижня;

$y(x,t)$ – переміщення точки осі стрижня з координатою x в момент часу t (динамічне переміщення);

$\varphi(x,t)$ – динамічний кут повороту;

$M(x,t)$ – динамічний згинний момент;

$Q(x,t)$ – динамічна поперечна сила;

$f(x,t)$ – інтенсивність інерціальних сил, що з'являються під час коливань (сила Д'Аламбера).

Відомо [14], що рівняння вільних поперечних коливань з врахуванням власної ваги записується наступним чином:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Методи дослідження. В [15] авторами вперше знайдено точний розв'язок даного диференціального рівняння. Як результат, було отримано формули для динамічних параметрів стану стрижня (переміщення, кут повороту, згинний момент та поперечні сили), які подано у вигляді безрозмірних фундаментальних розв'язків (1). Наявність цих формул робить можливим дослідження згинних коливань стрижня з врахуванням власної ваги за будь-яких граничних умов.

Частотне рівняння. Динамічні граничні умови для стрижня, нижній кінець якого жорстко закріплений, а верхній шарнірно опертий відповідно до рис. 1:

$$y(0,t) = 0; \quad M(0,t) = 0; \quad y(l,t) = 0; \quad \varphi(l,t) = 0.$$

Реалізуючи ці граничні умови за допомогою точних формул з [15] отримуємо частотне рівняння, ліва частина якого представлена рядом, що сходиться за степенями безрозмірного параметру K :

$$\eta_0 + \eta_1 K^2 + \eta_2 K^4 + \eta_3 K^6 + \dots = 0. \quad (2)$$

Безрозмірні коефіцієнти рівняння η_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) визначаються формулами:

$$\eta_k = \sum_{j=0}^k (\beta_{4,j}(l) \tilde{\beta}_{2,k-j}(l) - \tilde{\beta}_{4,j}(l) \beta_{2,k-j}(l)), \quad (3)$$

де

$$\beta_{n,0}(l) = c_{n,0,0} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \alpha^j c_{n,0,j}; \quad (4)$$

$$\tilde{\beta}_{n,0}(l) = f_{n,0,0} c_{n,0,0} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \alpha^j f_{n,0,j} c_{n,0,j}; \quad (5)$$

$$\beta_{n,k}(l) = c_{n,k,0} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \alpha^j c_{n,k,j}; \quad (6)$$

$$\tilde{\beta}_{n,k}(l) = f_{n,k,0} c_{n,k,0} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \alpha^j f_{n,k,j} c_{n,k,j}; \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{ql^3}{EI}. \quad (8)$$

Визначення безрозмірних коефіцієнтів рядів (4)-(7) можна виконати за допомогою групи рекурентних формул [15]:

$$c_{n,0,0} = \frac{1}{(n-1)!}; \quad c_{n,k,0} = \frac{1}{(n+4k-1)!};$$

$$c_{n,0,j} = \frac{(n-1)(n+2)\dots(n+3j-4)}{(n+3j-1)!}; \quad c_{n,k,j} = \frac{c_{n,k-1,j} + (f_{n,k,j} - 3)^2 c_{n,k,j-1}}{(f_{n,k,j} - 3)(f_{n,k,j} - 2)(f_{n,k,j} - 1)f_{n,k,j}},$$

де

$$f_{n,k,j} = n + 4k + 3j - 1 \quad (n = 2, 4) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Наслідуючи термінологію, прийняту у [15] параметр K називатимемо коефіцієнтом коливань.

Рівняння вигляду (2) часто зустрічаються у механіці. Щоб отримати розв'язок такого рівняння використано метод порівняння коренів, обчислених за різної кількості утриманих членів ряду [17]. Такий підхід дає можливість обчислити корені рівняння з будь-якою наперед заданою точністю.

Аналітичні формули для частот коливань. В публікації [15] отримано формулу для частот вільних коливань стрижневих конструкцій за будь-яких граничних умов:

$$p_j = \frac{K_j}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

де K_1, K_2, K_3, \dots – корені відповідного частотного рівняння. В нашому випадку частотне рівняння має вигляд (2). Таким чином, задача визначення частот для стрижня зводиться до знаходження безрозмірних коефіцієнтів коливань з рівняння (2).

Як видно з (2)-(7), значення коренів K_1, K_2, K_3, \dots залежатиме від безрозмірного параметру α . Визначимо актуальний діапазон значень даного параметру.

З теорій стійкості відомо [18, 19], що стрижень із заданим видом закріплення, що знаходиться під дією поздовжнього розподіленого навантаження при значенні:

$$q_{cr} = 52,5007 \frac{EI}{l^3} \quad (10)$$

втратить стійкість. Таким чином з практичної точки зору немає сенсу розглядати задачу коливань стрижня при значенні q більш ніж q_{cr} . Замінюючи у формулі (8) $q = q_{cr}$ та використовуючи (10), ми знайдемо максимально можливе значення α :

$$\alpha_{\max} = \frac{q_{cr} l^3}{EI} = 52,5007.$$

Як результат, значення α можна досліджувати на проміжку
 $0 \leq \alpha \leq 52,5007$.

(11)

Результати дослідження. Розглядаючи коефіцієнт K як функцію від змінної α та маючи набір значень цієї функції на інтервалі (11), апроксимуємо K поліномом. Щоб досягти високої точності апроксимації, степінь поліному обираємо з умови, щоб коефіцієнт детермінації був не менше 0,999. Для досягнення заданої точності, як показують обчислення, для апроксимації першого коефіцієнту коливань слід приймати поліном шостого степеня, а для другого та третього – другого. Кінцеві формули мають вигляд:

$$K_1 = 15,4182 - 0,00323\alpha - 0,03941\alpha^2 + 0,003597\alpha^3 - 0,0001472\alpha^4 + 0,0000027\alpha^5 - 1,9 \cdot 10^{-8} \alpha^6; \quad (12)$$

$$K_2 = 49,9646 - 0,1809\alpha - 0,00059\alpha^2; \quad (13)$$

$$K_3 = 104,2477 - 0,20267\alpha - 0,00028\alpha^2. \quad (14)$$

Відповідно до формул (9), (12)-(14), щоб визначити перші три частоти вільних коливань стрижня, маємо наступні аналітичні формули:

$$p_1 = (15,4182 - 0,00323\alpha - 0,03941\alpha^2 + 0,003597\alpha^3 - 0,0001472\alpha^4 + 0,0000027\alpha^5 - 1,9 \cdot 10^{-8} \alpha^6) \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad (15)$$

$$p_2 = (49,9646 - 0,1809\alpha - 0,00059\alpha^2) \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad (16)$$

$$p_3 = (104,2477 - 0,20267\alpha - 0,00028\alpha^2) \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (17)$$

Використовуючи формули (8), (15)-(17), знаючи характеристики q, l, EI , можливо розрахувати частоти коливань стрижня з врахуванням власної ваги без використання наближених методів.

Формули для визначення частот коливань невагомого стрижня заданого способу закріплення відомі [20]:

$$\omega_1 = \frac{15,4182}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad (18)$$

$$\omega_2 = \frac{49,9649}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad (19)$$

$$\omega_3 = \frac{104,2477}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (20)$$

Звернемо увагу на роль безрозмірного параметру α , що є важливою характеристикою механічної системи. Зокрема, як бачимо з формули (8), при розрахунку невагомого стрижня значення параметру системи $\alpha = 0$. А отже, формули (18)-(20) є частковим випадком формул (15)-(17).

Використовуючи (15)-(20), легко встановити зв'язок між частотами невагомого стрижня та стрижня з врахування власної ваги:

$$\frac{P_1}{\omega_1} = 1 - 2,09 \cdot 10^{-4} \alpha - 0,00256\alpha^2 + 2,33 \cdot 10^{-4} \alpha^3 - 9,55 \cdot 10^{-6} \alpha^4 + 1,75 \cdot 10^{-7} \alpha^5 - 1,23 \cdot 10^{-9} \alpha^6; \quad (21)$$

$$\frac{P_2}{\omega_2} = 1 - 0,00362\alpha - 1,18 \cdot 10^{-5} \alpha^2; \quad (22)$$

$$\frac{P_3}{\omega_3} = 1 - 0,00194\alpha - 2,69 \cdot 10^{-6} \alpha^2. \quad (23)$$

Базуючись на (11), (21)-(23), ми також можемо визначити межі зміну співвідношення частот:

$$0 < \frac{P_1}{\omega_1} \leq 1; \quad 0,81 < \frac{P_2}{\omega_2} \leq 1; \quad 0,91 < \frac{P_3}{\omega_3} \leq 1.$$

Користуючись (21)-(23) відзначимо, що відмінність у 5% між значення перших трьох частот коливань невагомому стрижню та стрижня з врахуванням власної ваги встановлюється при значенні α відповідно $0,11\alpha_{cr}$, $0,25\alpha_{cr}$, $0,47\alpha_{cr}$.

Практичний застосунок. Для прикладу виконаємо розрахунок сталевого ланцюгового райзеру (СЛР). Дана конструкція є досить поширеною у регіонах видобутку нафти та газу [10] і часто зустрічається у науковій літературі. В майбутньому, актуальність дослідження СЛР лише зростатиме з огляду на розробку нових родовищ, в тому числі і у шлейфі Чорного моря.

Зрозуміло, що при проектуванні райзерів в тому числі враховується вплив оточуючого середовища, швидкість потоку внутрішньої рідини. Однак у практиці розрахунків динамічних характеристик даного типу конструкцій [8-10] обов'язковим етапом є розрахунок власних частот коливань конструкцій, не заповнених рідиною.

У [8, 9] в ході експерименту та шляхом комп'ютерного моделювання методом скінчених елементів досліджено коливання труби райзера малого діаметру. Однак, в реальному житті [10] такі конструкції застосовуються для глибоководного добування. Діаметри труб конструкції при цьому досягають 457,2 мм (18 дюймів) і навіть 609,6 мм (24 дюймів), з товщиною стінок більше 38,1 мм (1,5 дюймів).

Конструкцію відповідно до прийнятої розрахункової моделі (рис. 1) представимо у вигляді стрижня з наступними фізико-геометричними характеристиками:

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН} / \text{м}^2; D = 0,1524 \text{ м}; \delta = 0,0127 \text{ м}; L = 45,72 \text{ м};$$

$$I = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4; m = 43,725 \text{ кг} / \text{м},$$

де D – зовнішній діаметр труби, δ – товщина стінки райзера.

За (8) визначимо, що для даної системи безрозмірний параметр $\alpha = 14,961$.

Використовуючи формули (15)-(17) визначимо частоти власних коливань стрижня з врахування власної ваги:

$$p_1 = 1,5676; p_2 = 5,6436; p_3 = 12,1137.$$

Частоти аналогічного стрижня, обчислені без врахування власної ваги, знаходяться за формулами (18)-(20):

$$\omega_1 = 1,8442; \omega_2 = 5,9878; \omega_3 = 12,4546.$$

Порівнявши отримані результати, можемо встановити, що різниця між отриманими значеннями становить: для першої частоти 15%; для другої – 5,7%; для третьої – 2,7%. Виявлена відносна похибка вказує на необхідність врахування власної ваги при визначенні частоти власних коливань стрижневих систем для яких значення параметру α не є близьким до нуля. Загалом, як показують розрахунки [16], чим більше параметр α , тим більше відрізнятимуться значення розрахункових параметрів коливань з врахуванням власної ваги конструкції від значень аналогічних параметрів, обчислених для моделі невагомому стрижню.

Висновки.

1. В роботі в аналітичній формі представлено формули для перших трьох частот коливань (15)-(17), засновані на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння. Використовуючи їх, можна обчислити частоти без використання наближених методів.

2. Чим більше значення поздовжнього навантаження – тим більша різниця між частотами невагомому стрижню та стрижню з врахуванням власної ваги. Максимальна різниця буде досягнута при значенні $q = q_{cr}$. З формул (21)-(23) визначено:

- при наближенні навантаження q до критичного значення, частота p_1 знижується до 0;
- різниця частот p_2 і ω_2 досягає 19%;
- різниця частот p_3 і ω_3 досягає 9%.

3. На прикладі сталевих ланцюгових кайзерів показано важливість врахування власної ваги вертикальних габаритних конструкцій.

В будівництві та суміжних галузях існує безліч стрижневих конструкцій з іншими способами закріплення кінців. Тому в перспективі даний метод може бути поширений і на інші випадки граничних умов. До обмежень методу слід віднести той факт, що він застосовується лише для конструкцій сталого перетину. Для його поширення на випадок конструкцій зі змінним перетином необхідно отримати точний розв'язок відповідного диференціального рівняння.

Література

1. Luo R. Formulating frequency of uniform beams with tip mass under various axial loads. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2013. Vol. 228 (1). P. 67–76. <https://doi.org/10.1177/0954406213482065>.
2. Naguleswaran S. Vibration and stability of uniform Euler–Bernoulli beams with step change in axial force. *International Journal of Mechanical Engineering Education*. 2005. Vol. 33 (1). P. 64–76. <https://doi.org/10.7227/IJMEE.33.1.7>.
3. Ghandi E., Rafezy B. The effect of axial loads on free vibration of symmetric frame structures using continuous system method. *Journal of Structural and Construction engineering*. 2016. vol. 3 (2). P. 86–100.
4. Nandi A., Neogy S., Roy D. A simple experiment to demonstrate the effect of axial force on natural frequency of transverse vibration of a beam. *International Journal of Mechanical Engineering Education*. 2010. Vol. 38 (1). P. 1–8. <https://doi.org/10.7227/IJMEE.38.1>.
5. Lajimi S., Heppler G. R. Free vibration and buckling of cantilever beams under linearly varying axial load carrying an eccentric end rigid body. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 37 (1). P. 89–109.
6. Uzny S., Sokół K. Free Vibrations of Column Subjected to Euler's Load with Consideration of Timoshenko's Theory. *Vibrations in Physical Systems*. 2014. Vol. 26. P. 319–326.
7. Жарницкий В. И., Шарипов Ш. Ш. Поперечные колебания сооружения с учетом вертикальной нагрузки от собственного веса. *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2013. №3. С. 28–30.
8. Kumar S., Singh S. Analysis of Two Phase Flow Induced Vibration in Piping Systems. *International research journal of engineering and technology*. 2019. Vol. 06 (08). P. 1243–1264.
9. Garcia-Planas M. I., Mediano B. Stability analysis of a clamped-pinned pipeline conveying fluid. *WSEAS Transactions on Systems*. 2014. Vol. 13. P. 54–64. URL: <http://hdl.handle.net/2117/22879>.
10. Vijayaraghavan V., Shi X., Lu R. et al. Large Diameter Steel Catenary Riser Solutions for Semi-submersible Platforms in Offshore Northwest Australia. *Offshore Technology Conference: Houston, Texas, USA, 2015*. <https://doi.org/10.4043/25719-MS>.
11. Al-Sahib N. A., Jameel A. N., Abdulateef O. F. Investigation into the Vibration Characteristics and Stability of a Welded Pipe Conveying Fluid. *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. 2010. Vol. 4 (3). P. 378–387.
12. Rao S. S. *Mechanical vibrations*. 5th Edition. Pearson Education, 2010. 1104 p.
13. Shaker F. J. Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams. *Lewis Research Center Report NASA*. 1975. 33 p.

14. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.
15. Krutii Yu., Suriyaninov M., Vandynskiy V. Exact solution of the differential equation of transverse oscillations of the rod taking into account own weight. *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 116. p. 02022. [https://doi: 10.1051/mateconf/201711602022](https://doi.org/10.1051/mateconf/201711602022).
16. Krutii Yu., Suriyaninov M., Vandynskiy V. Analytic formulas for the natural frequencies of hinged structures with taking into account the dead weight. *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 230. p. 02016. [https://doi: 10.1051/mateconf/201823002016](https://doi.org/10.1051/mateconf/201823002016).
17. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. Минск: Вышэйшая школа, 1990. 349 с.
18. Wang C. M., Wang C. Y., Reddy J. N. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press, 2005. 207 p.
19. Krutii Yu., Vandynskiy V. Exact solution of buckling problem of the column loaded by self-weight. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 708. p. 012062. [https://doi: 10.1088/1757-899X/708/1/012062](https://doi.org/10.1088/1757-899X/708/1/012062).
20. Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J. Mechanical Vibrations for Engineers. John Wiley & Sons, 1984. 266 p.

References

- [1] R. Luo, "Formulating frequency of uniform beams with tip mass under various axial loads", *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 228, pp. 67–76, 2013. [https://doi: 10.1177/0954406213482065](https://doi.org/10.1177/0954406213482065).
- [2] S. Naguleswaran, "Vibration and stability of uniform Euler-Bernoulli beams with step change in axial force", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, vol. 33, pp. 64–76, 2005. [https://doi: 10.7227/IJMEE.33.1.7](https://doi.org/10.7227/IJMEE.33.1.7)
- [3] E. Ghandi, B. Rafezy, "The effect of axial loads on free vibration of symmetric frame structures using continuous system method", *Journal of Structural and Construction engineering*, vol. 3, pp. 86–100, 2016.
- [4] A. Nandi, S. Neogy, D. Roy, "A simple experiment to demonstrate the effect of axial force on natural frequency of transverse vibration of a beam", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, vol. 38, pp. 1–8, 2010. [https://doi: 10.7227/IJMEE.38.1](https://doi.org/10.7227/IJMEE.38.1).
- [5] S. Lajimi, G. R. Heppler, "Free vibration and buckling of cantilever beams under linearly varying axial load carrying an eccentric end rigid body", *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 37, pp. 89–109, 2013.
- [6] S. Uzny, K. Sokół, "Free Vibrations of Column Subjected to Euler's Load with Consideration of Timoshenko's Theory", *Vibrations in Physical Systems*, vol. 26, pp. 319–326, 2014.
- [7] V.I. Zharnitskiy, Sh.Sh. Sharipov, "Poperechnye kolebaniya sooruzheniy s ucheton verticalnoy nagruzki ot sobstvennoho vesa", *Earthquake engineering. Constructions safety*, vol. 3, pp. 28–30, 2013.
- [8] S. Kumar, S. Singh. "Analysis of Two Phase Flow Induced Vibration in Piping Systems", *International research journal of engineering and technology*, vol. 06/08, pp. 1243–1264, 2019.
- [9] M.I. Garcia-Planas, B. Mediano, "Stability analysis of a clamped-pinned pipeline conveying fluid", *WSEAS Transactions on Systems*, vol. 13, pp. 54–64, 2014. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/2117/22879>.
- [10] V. Vijayaraghavan, X. Shi, R. Lu, et al., "Large Diameter Steel Catenary Riser Solutions for Semi-submersible Platforms in Offshore Northwest Australia", *Offshore Technology Conference*, Houston, Texas, USA, May 2015. [https://doi: 10.4043/25719-MS](https://doi.org/10.4043/25719-MS).
- [11] K.A. Al-Sahib, A.N. Jameel, et al., "Investigation into the Vibration Characteristics and Stability of a Welded Pipe Conveying Fluid", *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol. 4 (3), pp. 378–387, 2010.

- [12] S.S. Rao, *Mechanical vibrations*, 5th Edition. Pearson Education, 2010.
- [13] F.J. Shaker, "Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams", *Lewis Research Center Report NASA*, 1975.
- [14] M.V. Vasylenko, O.M. Alekseichuk, *Teoriya kolyvan' i stiikosti rukhu*. Vyscha shkola, 2004.
- [15] Yu. Krutii, M. Suriyaninov, V. Vandynskiy, "Exact solution of the differential equation of transverse oscillations of the rod taking into account own weight", *MATEC Web of Conferences*, vol. 116, p. 02022, 2017. [https://doi: 10.1051/mateconf/201711602022](https://doi.org/10.1051/mateconf/201711602022).
- [16] Yu. Krutii, M. Suriyaninov, V. Vandynskiy, "Analytic formulas for the natural frequencies of hinged structures with taking into account the dead weight", *MATEC Web of Conferences*, vol. 230, p. 02016, 2018. [https://doi: 10.1051/mateconf/201823002016](https://doi.org/10.1051/mateconf/201823002016).
- [17] V.P. Ilyin, V.V. Karpov, A.M. Maslennikov, *Chislennyye metody resheniya zadach stroitelnoi mekhaniki*. Vysheyshaya shkola, 1990.
- [18] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy, *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC Press, 2005.
- [19] Yu. Krutii, V. Vandynskiy, "Exact solution of buckling problem of the column loaded by self-weight", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 708, p. 012062, 2019. [https://doi: 10.1088/1757-899X/708/1/012062](https://doi.org/10.1088/1757-899X/708/1/012062).
- [20] M. Lalanne, P. Berthier, J. Der Hagopian, *Mechanical Vibrations for Engineers*. John Wiley & Sons, 1984.

МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

¹Крутий Ю.С., д.т.н., профессор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹Вандинский В.Ю., аспирант,
vandynsky@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4812-7361

¹Одесская государственная академия строительства и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, г. Одесса, 65029, Украина

Аннотация. Работа посвящена исследованию свободных колебаний с учетом собственного веса вертикальных стержневых конструкций, которые в расчетной схеме сводятся к стержню, жестко закрепленного нижним концом и шарнирно опертого верхним. Во время исследований использовался авторский метод, основанный на точном решении соответствующего дифференциального уравнения колебаний в частных производных с переменными коэффициентами.

Для заданных граничных условий в общем виде в безразмерном формате выписано частотное уравнение и определен метод поиска его корней. Определение частот собственных колебаний сводится к нахождению из частотных уравнений соответствующих безразмерных коэффициентов. Представив коэффициент колебаний как переменную функцию от безразмерного параметра, характеризующего механическую систему, и вычислив массив данных на допустимом промежутке значений параметра, коэффициент колебаний аппроксимирован полиномом. Как результат, получены конечные формулы для вычисления коэффициента колебаний, а, следовательно, и частоты собственных колебаний для стержня с любыми физико-механическими характеристиками.

Выполнен расчет частоты собственных колебаний конструкции стального цепного райзера (СЦР), приведенного к заданной стержневой модели. При проектировании райзеров помимо прочего во внимание принимают характеристики внутреннего потока жидкости, вибрации оборудования. Однако обязательным в практике динамических расчетов конструкций остается исследования спектра частот их собственных колебаний. Поскольку такие конструкции, как правило, имеют довольно значительную высоту, вопрос учета

собственного веса при их проектировании является весьма важным аспектом. Рассмотрен пример, в котором авторским методом вычислено первые три частоты колебаний. Сравнив их с известными формулами для невесомых стержней, установлено, что учет собственного веса снижает значения соответствующих частот. Погрешность значений для первой частоты является наибольшей и составляет 15%.

Максимальное отличие между соответствующими частотами свободных колебаний при учете собственного веса достигается при критическом из условий устойчивости значении продольной нагрузки.

Ключевые слова: частота колебаний, свободные колебания, стержень постоянного сечения, собственный вес, аналитические расчеты.

METHOD OF ROD STRUCTURES' CALCULATION FOR VIBRATIONS TAKING INTO ACCOUNT SELF-WEIGHT

¹**Krutii Yu.S.**, Doctor of Science, Professor,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹**Vandynskyi V.Yu.**, post-graduate student,
¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
4, Didrikhson Street, Odessa, 65029, Ukraine

Abstract. The work is devoted to the study of free vibrations taking into account the self-weight of vertical rod structures, which in the design scheme are reduced to a clamped-pinned rod. The research used the author's method, which is based on the exact solution of the corresponding partial differential equation of vibration with variable coefficients.

For the given boundary conditions the frequency equation is written in dimensionless form and the method of finding its roots is determined. Determining the frequencies of natural vibration is reduced to finding the corresponding dimensionless coefficients from the frequency equations. Representing the vibration coefficient as a variable function of the dimensionless parameter that characterizes the mechanical system, and calculating the data set on the allowable range of parameter values, the vibration coefficient was approximated by a polynomial. As a result, the final formulas for calculating the vibration coefficient and, consequently, the natural frequency for a rod with any physical and mechanical characteristics are obtained.

The calculation of the natural frequency of the steel catenary riser (SCR) reduced to a given design scheme is performed. When designing risers, among other things, the characteristics of the internal fluid flow, vibration of the equipment are taken into account. However, it is mandatory in the practice of dynamic calculations of structures to study the frequency spectrum of their nature vibrations. Because these constructions, as a rule, have quite large height, the question of the account of self-weight at their designing is rather important aspect. An example in which the author's method calculates the first three oscillation frequencies is considered. Comparing them with the known formulas for weightless rods, it was found that taking into account the self-weight decrease the value of the corresponding frequencies. The error of values for the first frequency is the largest and is 15%.

The greatest difference between the corresponding natural frequencies, taking into account the self-weight, is achieved at the critical value of the longitudinal load, in terms of stability.

Keywords: vibrations' frequency, nature vibrations, uniform rods, self-weight, analytical calculations.

Стаття надійшла до редакції 11.02.2021