

**Выводы.** В данной работе рассмотрены история создания, эксплуатации и современной реконструкции (капитального ремонта) Тёщинского моста. Проведена сравнительная характеристика с похожими мостами в разных странах.

**Литература:**

1. [http://odessaguide.net/sights\\_motherinlawsbridge.ru.html](http://odessaguide.net/sights_motherinlawsbridge.ru.html)
2. <http://www.bestkv.com/odessa-info/ehto-posmotret/teshin-most>
3. <https://odessahistory.net/log/story/teschin-most-kotoryi-iznachalno-most-komsomolskii>

УДК 531.383

**ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД  
ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИССИПАТИВНОГО  
МОМЕНТА СИЛ**

**Козаченко К.А., студ. гр. ПГС-454**

*Научный руководитель – Козаченко Т.А., к. ф.-м.н., доцент  
(кафедра Теоретической механики, Одесская государственная  
академия строительства и архитектуры)*

**Аннотация.** Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием нестационарного диссипативного момента сил. Система уравнений движения тела приводится к стандартному виду системы с двумя вращающимися фазами. Полученная система проинтегрирована численно. Проведен анализ полученных решений.

**Актуальность.** В жизни мы достаточно часто наблюдаем сложные движения тел. Некоторые из них можно представить как модель движения одного твердого тела: летательные аппараты, небесные тела, космические корабли. На протяжении многих лет при изучении движения твердых тел были выделены определенные задачи, разработано множество теорий и методов. Одной из них является задача о движении твердого тела, близкому к случаю Лагранжа, которая актуальна и в наше время. Данной теме посвящено множество работ [1]. Рассмотрены движения динамически симметричного твердого тела при случайных колебаниях точки опоры, при наличии сил сопротивления, дебаланса тяги. Изучены возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием

нестационарного восстанавливающего момента и возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени [2, 3]. В [1-3] исследования системы уравнений движения проведены с помощью метода усреднения. Решения усредненной системы получены в аналитическом виде в первом и втором приближениях. В данной работе проводится исследование уравнений движения динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с помощью численного интегрирования.

**Постановка задачи.** Рассмотрим движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего и нестационарного возмущающего моментов. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\
 C\dot{r} &= M_3, \\
 \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\
 M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i=1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела;  $A$  – экваториальный,  $C$  – осевой момент инерции, ( $A \neq C$ ); величины  $M_i (i=1, 2, 3)$  – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они являются  $2\pi$ –периодическими функциями от углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , а также зависят от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $t$  – время).

При исследовании системы (1) будем предполагать, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость достаточно велика, проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции одного порядка малости с восстанавливающим моментом. Данные предположения представим в виде неравенств [1]:

$$\begin{aligned}
 (p^2 + q^2)^{1/2} &\ll r, \quad Cr^2 \gg k, \\
 |M_i| &\ll k \quad (i=1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Исходя из (2) запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \\
 M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i=1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Функции  $M_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а также переменные и постоянные  $P, Q, r, \psi, \theta, K, A, C$  предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Исследуем решение системы (1) при предположениях (2) и соотношениях (3) на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$  [1].

Для решения поставленной задачи используем методику изложенную в [1]. Систему уравнений (1) с помощью ряда преобразований приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) + \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0 \sin \theta \sin \alpha - \\
 &\quad - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha), \\
 \dot{b} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) - \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0 \sin \theta \cos \alpha + \\
 &\quad + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\
 &\quad - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha), \quad (4) \\
 \dot{\delta} &= \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad M_i^0(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) \equiv M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \phi, \tau), \\
 \dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta, \\
 \dot{\theta} &= \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C - A)A^{-1} \delta \\
 \dot{\alpha} &= CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta + \\
 &\quad + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta, \quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Уравнения для  $\dot{a}, \dot{b}, \dot{\delta}, \dot{\alpha}$  получены в результате замены переменных

$$\begin{aligned}
 P &= a \cos \gamma + b \sin \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \\
 Q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi, \quad (5) \\
 r &= r_0 + \varepsilon \delta, \quad \gamma = (C - A)A^{-1}rt, \quad \alpha = \gamma + \varphi.
 \end{aligned}$$

и преобразований системы (1).

В системе (4):  $a, b, r, \psi, \theta$  – медленные переменные;  $\gamma, \alpha$  – быстрые переменные. В работах [1–3] для системы уравнений (4) были получены решения уравнений в первом и втором приближениях в результате использования метода усреднения. В данной работе система (4) решена численно с помощью программного пакета Maple.

**Результаты исследования.** Исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Возмущающие моменты  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют вид:

$$M_1 = -\varepsilon^2 f_1(\tau) P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 f_1(\tau) Q, \quad M_3 = -\varepsilon^2 f_3(\tau) r. \quad (6)$$

Здесь  $f_1(\tau), f_3(\tau)$  – положительные интегрируемые функции, зависящие от свойств среды,

$$f_1(\tau) = f_1 + \Delta f_1 \tau, \quad f_3(\tau) = f_3 + \Delta f_3 \tau, \quad f_1, f_3, \Delta f_1, \Delta f_3 - \text{const.}$$

Система (4) в результате подстановки (6) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon A^{-1} f_1(\tau)(a + KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-2} \delta \sin \theta \sin \alpha) - \\ &- \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) - \varepsilon^2 f_3(\tau) KC^{-2}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha + \\ &+ \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha), \\ \dot{b} &= -\varepsilon A^{-1} f_1(\tau)(b - KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-2} \delta \sin \theta \cos \alpha) + \\ &+ \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) + \varepsilon^2 f_3(\tau) KC^{-2}r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha - \\ &- \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2KC^{-1}r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha), \\ \dot{\delta} &= -\varepsilon C^{-1} f_3(\tau) r_0 - \varepsilon^2 C^{-1} f_3(\tau) \delta, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta, \\ \dot{\alpha} &= CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} \cos \theta + \\ &+ \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2} \delta \cos \theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C - A)A^{-1} \delta. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) проинтегрирована численно при различных начальных условиях. Полученные решения использовались для нахождения проекций вектора угловой скорости и величины кинетического момента.

На рис. 1 представлены графики изменения проекций  $p, q, r$  вектора угловой скорости на главные оси инерции тела. Значения  $p, q, r$  восстанавливались по формулам (2) и (5), где  $a, b, \delta, \psi, \theta, \gamma, \alpha$  получены в результате решения системы (7) при начальных условиях:

$$a_0 = 0,38; \quad b_0 = 1,02; \quad r_0 = \sqrt{3}; \quad \psi_0 = \frac{\pi}{3}; \quad \theta_0 = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}; \quad \gamma_0 = 0; \quad (8)$$

$$A = 1,8; \quad C = 1,0; \quad K = 5; \quad f_1 = 1,25; \quad f_3 = \Delta f_1 = \Delta f_3 = 1; \quad \varepsilon = 0,1.$$

Как видно из рис. 1 величины  $p, q$  осциллируют в пределах от -0,42 до 0,47 и медленно затухают. Осевая составляющая скорости вращения  $r$  медленно убывает.

При данных начальных условиях характер изменения величины кинетического момента  $G$  представлен на рис. 2. Величина кинетического момента  $G$  определялась по формуле:

$$G = \sqrt{A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2} \quad (9)$$

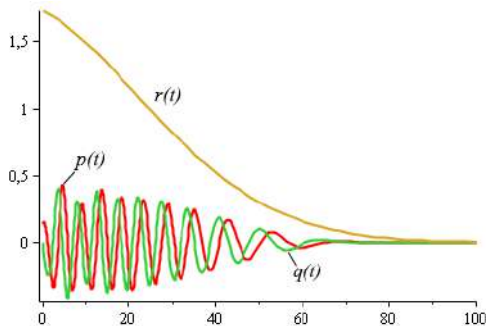


Рис. 1. Графики функций  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$

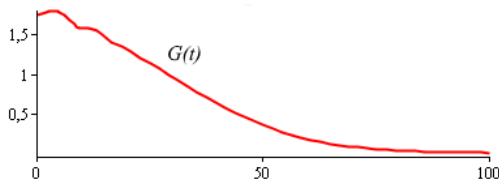


Рис. 2. Величина кинетического момента  $G(t)$

**Выводы.** Рассмотрено движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки под действием постоянного восстанавливающего момента и возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Исследована механическая модель, отвечающая случаю движения тела под действием диссипативного момента. Построены графики проекций вектора угловой скорости на главные оси инерции тела и график изменения величины кинетического момента, при определенных параметрах и начальных условиях.

#### Литература:

1. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 2017. 241p.
2. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Возмущенные вращения твердого тела под действием под действием нестационарного восстанавливающего момента времени. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С. 77–84.
3. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. J. Appl. Math. Mech. 2017. Vol. 81. № 2. pp. 79-84.