УДК 69.059.4; 72.025

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (СОСТАВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ГРАЖДАНСКИХ ЗДАНИЙ В ПРОЦЕССЕ РЕКОНСТРУКЦИИ)

Суханов В.Г. ***(Одесская Государственная Академия строительства и архитектуры, г. Одесса)***

Исследуются методы анализа критерия чувствительности строительных конструкций относительно традиционных переменных проектирования и формы конструкции.

Методы анализа (вариационные) *критерия чувствительности* строительных конструкций относительно традиционных переменных проектирования и формы конструкции могут быть объединены с использованием общих вариационных формулировок (принцип Гамильтона, принцип виртуальной работы для составных конструкций, свободные колебания составной конструкции) для получения выражений чувствительности функционалов по отношению к вариациям объединенных переменных проектирования. Как и в случае раздельных вариаций традиционных переменных проектирования и переменных формы, при анализе *критерия чувствительности* собственных значений не требуется сопряженных переменных.

В качестве примера, нередко возникающего в процессе реконструкции и реставрации, рассмотрим составную конструкцию ферма – балка – плита перекрытия (пластина), поведение которой описывается вариационным уравнением на собственные значения

$$a_{u,\Omega}(y,\bar{y}) = \zeta d_{u,\Omega}(y,\bar{y}) \text{ для всех } \bar{y} \in Z,$$

где $y \equiv \left[\omega^{ij}\bar{v}^{ij}\bar{\theta}^{ij}\hat{v}^{ij}\hat{\theta}^{ij}q_k^{11}q_k^{n1}q_k^{1m}q_k^{nm}\right]^T$, причем Z – пространство кинематически допустимых перемещений, удовлетворяющих однородным граничным и внутренним условиям между элементами составной конструкции, а также кинематическим внутренним условиям между элементами; u – переменные проектирования; i, j – внутренние элементы; Ω - открытая область составной конструкции;

a_u - энергия деформации элемента *i;* $y \in Z$ - амплитудная функция, от которой зависит величина гармонических колебаний составной конструкции в поле перемещений; $a_{u,\Omega}(y,\bar{y})$ - левая часть известного вариационного уравнения на собственные значения для отдельных элементов конструкций; $d_{u,\Omega}(y,\bar{y})$ - билинейная форма, связанная с матрицами геометрической жесткости и масс.

Для получения формулы чувствительности при помощи

$$\zeta' = \left[a'_{\delta u}(y,y) - \zeta d'_{\delta u}(y,y)\right] + \left[a'_V(y,y) - \zeta d'_V(y,y)\right],$$

где ζ - собственное значение (квадрат собственной частоты или критическая нагрузка), необходимо вывести выражения для $a'_{\delta u}(y,y), d'_{\delta u}(y,y), a'_V(y,y)$. Для получения $a'_{\delta u}(y,y)$ и $a'_V(y,y)$ соответственно могут быть использованы формулы для отдельных элементов: ферма, балка, пластина. Далее, при помощи формул для исчисления производной по направлению (в смысле Гато) и формулы для динамических задач вычисления билинейной формы кинетической энергии получим

$$d_{\delta u}(y,y) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\iint_{\Omega_1^{ij}} \rho\omega^{ij^2}\,\delta a^{ij}\,d\Omega_1 + \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_2^{ij}}\left[\rho\tilde{\upsilon}^{ij^2}\left(\tilde{d}^{ij}\tilde{h}^{ij}\right)_{\tilde{b}^{ij}} + \tilde{\theta}^{ij^2}\left(\tilde{I}_G^{ij}\right)_{\tilde{b}^{ij}}\right]\delta\tilde{b}^{ij}\,d\Omega_2 +$$

$$+\sum_{i+1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\Omega_3^{ij}}\left[\rho\hat{\upsilon}^{ij^2}\left(\hat{d}^{ij}\hat{h}^{ij}\right)_{\hat{b}^{ij}} + \hat{\theta}^{ij^2}\left(\hat{I}_G^{ij}\right)_{\hat{b}^{ij}}\right]\delta\hat{b}^{ij}\,d\Omega_3 + \left[q_k^{11^T} M\left(A_l^{11}\right) q_k^{11}\right]_{A_l^{11}}\delta A_l^{11} +$$

$$\left[q_k^{1m^T} M\left(A_l^{1m}\right) q_k^{1m}\right]_{A_l^{1m}}\delta A_l^{1m} + \left[q_k^{n1^T} M\left(A_l^{n1}\right) q_k^{n1}\right]_{A_l^{n1}}\delta A_l^{n1} + \left[q_k^{nm^T} M\left(A_l^{nm}\right) q_k^{nm}\right]_{A_l^{nm}}\delta A_l^{nm}$$

(3.4.a.1)

Используя также формулу вариаций билинейной формы по переменным проектирования и формулы для билинейной формы кинетической энергии, имеем

$$d'_V(y,y) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\Omega_1^{ij}}\left[-2t^{ij}\rho\omega^{ij}\left(\nabla\omega^{ij^T}V\right) + div\left(t^{ij}\rho\omega^{ij^2}V\right)\right]d\Omega_1 +$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_2^{ij}}\left[-2\rho\tilde{d}^{ij}\tilde{h}^{ij}\tilde{\upsilon}^{ij}\left(\tilde{\upsilon}_x^{ij}V\right)+\left(\rho\tilde{d}^{ij}\tilde{h}^{ij}\tilde{\upsilon}^{ij^2}V\right)_x-2\tilde{I}_G^{ij}\tilde{\theta}^{ij}\left(\tilde{\theta}_x^{ij}V\right)+\left(\tilde{I}_G^{ij^2}V\right)_x\right]d\Omega_2+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\Omega_3^{ij}}\left[-2\rho\hat{d}^{ij}\hat{h}^{ij}\hat{\upsilon}^{ij}\left(\hat{\upsilon}_y^{ij}V\right)+\left(\rho\hat{d}^{ij}\hat{h}^{ij}\hat{\upsilon}^{ij^2}V\right)_y-2\hat{I}_G^{ij}\hat{\theta}^{ij}\left(\hat{\theta}_y^{ij}V\right)+\left(\hat{I}_G^{ij^2}V\right)y\right]d\Omega_3$$

(3. 4.a.2)

При условии, что традиционные переменные проектирования для каждого элемента равны константе, вышеприведенное уравнение упрощается:

$$d_V'(y,y)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\iint_{\Omega_1^{ij}}\left[t^{ij}\rho\omega^{ij^2}\left(V_x^x+V_y^y\right)\right]d\Omega_1+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_2^{ij}}\left(\rho\tilde{d}^{ij}\tilde{h}^{ij^2}\tilde{\upsilon}^{ij^2}+\tilde{I}_G^{ij}\tilde{\theta}^{ij^2}\right)V_x d\Omega_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\Omega_3^{ij}}\left(\rho\hat{d}^{ij}\hat{h}^{ij}\hat{\upsilon}^{ij^2}+\hat{I}_G^{ij}\hat{\theta}^{ij^2}\right)V_y d\Omega_3,$$

(3. 4.a.3)

где $V=\left[V^xV^y\right]^T$ для элемента перекрытия (пластина), а V - скорость в осевом направлении для каждого балочного элемента. Выражение *критерия чувствительности* для простого собственного значения, представленное формулой

$$\zeta'=\left[a_{\delta u}'(y,y)-\zeta d_{\delta u}'(y,y)\right]+\left[a_V'(y,y)-\zeta d_V'(y,y)\right],$$

переписывается в виде

$$\zeta'=\left[a_{\delta u}'(y,y)-\zeta d_{\delta u}'(y,y)\right]+\left[a_V'(y,y)-\zeta d_V'(y,y)\right],$$

(3. 4.a.4)

где (3. 4.a.1) и (3. 4.a.3) могут быть использованы для получения в явном виде членов (3. 4.a.4).

При вычислении *критерия чувствительности* собственного значения используются следующие исходные данные: сосредоточенная нагрузка f, приложенная к середине пролета балки пролетом l; площадь поперечного сечения h, которая равна константе и может равномерно изменяться; для простоты форма балки и длина фермы остаются фиксированными. Вычисления *критерия чувствительности* традиционных переменных проектирования и формы проводятся отдельно.

Конечно-элементная модель балочно-пластинчато-стержневой составной конструкции, применяется для двух случаев: в первом - при вариации традиционных переменных проектирования, во втором - конечно-элементная модель при вариации формы. В табл. 3. 4.а.1 [Haug E.J. Arora J.S. Applied Optimal Design, 1979] представлены результаты, характеризующие точность анализа чувствительности для фундаментального собственного значения при равномерном 5%-ном раздельном изменении традиционных переменных проектирования и формы.

Результаты, показанные в данной таблице, демонстрируют превосходное совпадение между предсказанными значениями ζ' и действительными изменениями $\Delta\zeta$.

Таблица

Чувствительность основного собственного значения при проектировании составной конструкции ферма - балка – плита перекрытия (пластина)

Переменная проектирования	ζ'	$\Delta\zeta$	ζ '	$(\zeta'/\Delta\zeta\times100)$ %
Традиционная	0.1242E+04	0.2408E+03	0.2199E+03	91.3
Элемента формы	0.1215E+04	-02220E+02	-0.2119E+02	95.5

Таким образом, при сочетании анализа **критерия чувствительности** и конечно-элементного анализа конструкции следует принимать во внимание, что с точки зрения математики метод конечного элемента в анализе конструкции может рассматриваться как применение метода Галёркина для решения краевых задач с координатными функциями, определенными как кусочно-полиномиальные функции на сегментах (элементах) области. Хотя при вычислении коэффициентов в выражении для функции состояния и сопряженной переменной приходится иметь дело с большим количеством интегралов, эти вычисления могут быть выполнены с помощью стандартных подпрограмм конечно-элементного анализа. Во многих случаях кусочно-линейные полиномы будут адекватны и порядок полиномов, используемых при интегрировании по элементам будет очень низким, что позволяет вычислять интегралы аналитически и затабулировать члены выражения функции состояния и сопряженной переменной как конечные *элементы критерия чувствительности* проекта. Так, например, в случае балочной конструкции в качестве функции формы перемещения можно использовать бикубические полиномы Эрмита и, если линейная вариации площади поперечного сечения и квадратичная вариация момента инерции включаются в проектировочную функцию формы балки, то степень полиномов будет не выше четвертой. Таким образом, выполнение аналитического интегрирования и табулирования конечных элементов *критерия чувствительности* становится практически достижимой целью. Если мы имеем дело с более сложными конструкциями, такими как плиты, своды, купола, используются полиномы более чем одной переменной более высокого порядка, что ведет, следовательно, к необходимости численного построения конечного элемента *критерия чувствительности*. Тем не менее эти вычисления не являются существенно более громоздкими, чем вычисления, которые применяются сейчас в современных конечно-элементных программах.

Выводы

1. Существует возможность систематизировать проведение анализа критерия чувствительности конечных элементов с использованием проектировочных функций формы и функций формы перемещений; существенное преимущество описанного выше подхода связано с возможностью определения влияния ошибки вычисления, обусловленной разбиением на конечные элементы.
2. При выполнении подобных вычислений наблюдалось, что использование формул *критерия чувствительности*, для систем с распределенными параметрами и конечно-элементного метода анализа приводит к ошибке в вычислении

коэффициентов чувствительности, которая может быть определена в процессе итерационных корректировок проекта и последующего повторного анализа.

3. Влияние изменения проекта или ошибок, содержащихся в проектном решении, осуществляемых согласно проведенному анализу чувствительности, может быть предсказано и, если проводится повторный анализ, то предполагаемое изменение реакции конструкции можно сравнить с реальным; если же возникает рассогласование, то ошибку следует искать в конечно-элементной аппроксимации.

Литература

1. Белов Ю.А., Донченко В.С. и др. Проверка адекватности математической модели реальному объекту по корреляционным функциям выходных количественных параметров. – К.: Издв-во КГУ, 1979. – 20 с.
2. Дж. Бендат, А. Пирсол Прикладной характер случайных данных. – М.:Мир, 1989.
3. Гаврилова Т.А. Червинская К.Р. Извлечение и структурирование знаний для экспертных систем. – М.: Радио и связь, 1992. – 176 с.
4. Соболев Д.Н., Ким В.Е. Вероятностный расчет конструкций методом конечного элемента //Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. - № 1. – С. 34-37.
5. Р. Шеннон, Имитационное моделирование систем – искусство и находка. – М.:Мир, 1978.