

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ АРКОВИХ СИСТЕМ

Аль-Адарбех Алі Хасан Мохаммад, студ. гр. ПЦБ-622м(н)

Науковий керівник – Сур'янінов М.Г., д.т.н., проф. (кафедра Будівельної механіки, Одеська державна академія будівництва та архітектури)

Анотація. Розроблено математичні моделі конструкцій у формі аркових систем і методику аналізу їх напружено-деформованого стану на базі чисельно-аналітичного методу граничних елементів і методу скінченних елементів. Розв'язано крайові завдання статичної і динамічної аркових систем двома чисельними методами. Виконане порівняння результатів, отриманих методом граничних елементів та чисельно реалізованих у програмі MATLAB, з результатами розрахунків у пакеті ANSYS.

Вступ. Арки та комбіновані аркові системи знаходять широке застосування в будівництві, машинобудуванні, космонавтиці й інших галузях. У літературі приводяться розв'язки різних задач плоского деформування кругового стрижня, в основному, тільки з урахуванням деформації вигину. Отримано також розв'язок, що враховує деформацію розтягу, але тільки для часткових випадків навантаження. Відсутність досить повного аналітичного розв'язання задачі плоского деформування кругового стрижня сприяло широкому застосуванню чисельних методів [1 – 3], що дозволяють охопити всі різноманітні завдання, що висуваються практикою.

Метою роботи є застосування методу граничних елементів і методу скінченних елементів до розрахунків аркових систем при статичних і динамічних навантаженнях.

Для побудови співвідношень МГЕ кругового стрижня ухвалюємо лівогвинтову систему координат. На рис. 1 показані позитивні напрямки навантаження й статичних параметрів. Позитивні напрямки кінематичних параметрів ухвалюємо такими ж, як і для прямолінійних стрижнів, тобто лінійні переміщення в напрямку осей OX , OY вважаються позитивними. Кутові переміщення позитивні, якщо вони спрямовані за годинниковою стрілкою з боку осі OZ .

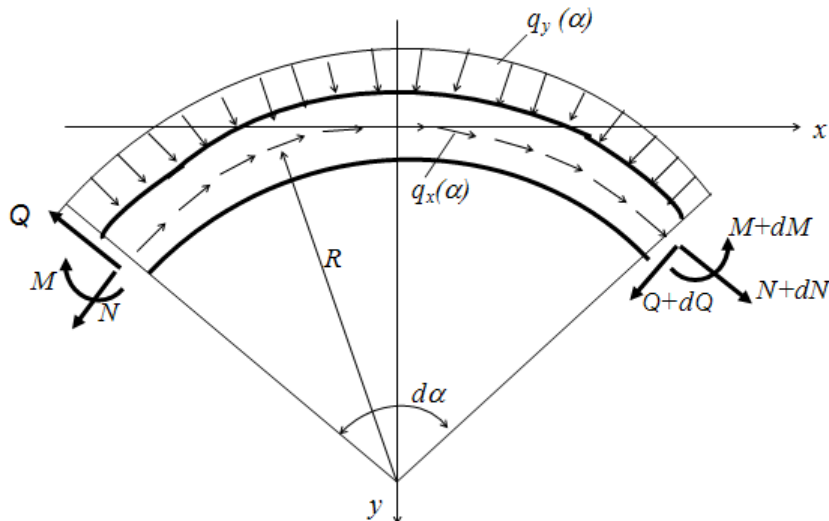


Рис. 1. Круговий стрижень

Рівновага елемента ds (рис. 1) приводить до наступних рівнянь:

$$\sum x = 0 \rightarrow \frac{dN}{d\alpha} = Q - q_x(\alpha)R; \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{d\alpha} = -N - q_y(\alpha)R; \quad (2)$$

$$\sum m(0) = 0 \rightarrow \frac{dM}{d\alpha} = QR. \quad (3)$$

Тут α – кутова координата. Принцип подвійності статичних і геометричних рівнянь дозволяє одержати вираження для деформації осі кругового стрижня

$$\varepsilon = \frac{1}{R}[u'(\alpha) - v(\alpha)]; \quad \kappa = \left\{ \frac{1}{R}[u'(\alpha) + v''(\alpha)] - \gamma'(\alpha) \right\} \frac{1}{R}, \quad (4)$$

де ε – деформація розтягання-стиску; κ – кривизна; $u(\alpha)$, $v(\alpha)$ – поздовжнє й поперечне переміщення; $\gamma(\alpha)$ – деформація зрушення.

Для кругового стрижня виконується також геометричне співвідношення

$$\varphi(\alpha) = -\gamma(\alpha) + \frac{1}{R}[u(\alpha) + v'(\alpha)], \quad (5)$$

де α – кут повороту перерізу.

Фізичні рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями кругового стрижня аналогічні прямолинійному стрижню

$$\varepsilon = N / EA; \quad \kappa = -M / EI; \quad \gamma = k_1 Q / GA. \quad (6)$$

Набір (1) – (6) свідчить про прийняття моделі жорсткого кругового стрижня з допущенням гіпотези плоских нормалей, недеформованості поперечного перерізу; малості кривизни і деформацій.

В подальших викладеннях ухвалюємо $\gamma(\alpha) = 0$, що несуттєво впливає на точність результатів. Виражаючи нормальну й поперечну сили через переміщення за допомогою (3), (4), (6) і підставляючи їх в (1), (2), одержимо зв'язану систему диференціальних рівнянь плоского деформування кругового стрижня в переміщеннях

$$\begin{cases} v^{IV}(\alpha) + \frac{EAR^2}{EI}v(\alpha) + u'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI}u'(\alpha) = \frac{R^4}{EI}q_y(\alpha); \\ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right)u''(\alpha) + v'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI}v'(\alpha) = -\frac{R^4}{EI}q_x(\alpha), \end{cases} \quad (7)$$

де перше рівняння відповідає вигину, а друге – розтягання стрижня.

Матричне рівняння МГЕ для кругового стрижня прийме вид:

$$\begin{pmatrix} EIv(\alpha) \\ EI\varphi(\alpha) \\ M(\alpha) \\ Q(\alpha) \\ EAu(\alpha) \\ N(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ 0 & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & -A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} & 0 & -A_{46} \\ A_{51} & A_{51} & -A_{53} & -A_{54} & A_{11} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & -A_{64} & 0 & A_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \\ EAu(0) \\ N(0) \end{pmatrix} + \int_0^\alpha \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ -B_{31} \\ -B_{41} \\ -B_{51} \\ -B_{61} \end{pmatrix} d\xi, \quad (8)$$

де фундаментальні ортонормовані функції й вантажні елементи представляються виразами [4]. У якості прикладу побудуємо епюри M , Q , N для кругового стрижня (рис. 2) з радіусом $R = 30$ м. Аналіз розрахунків показує, що результат МГЕ з урахуванням деформації розтягання збігається з трьома значущими цифрами точного розв'язку, а точність результатів МГЕ без урахування деформації розтягання теж достатньо висока, хоча збігаються тільки 2 значущі цифри, тобто вплив деформацій зрушення й розтягання при заданих геометричних співвідношеннях жорсткого стрижня невелике. Епюри M , Q , N представлені на рис. 2.

Розглянемо тепер вільні коливання у своїй площині арки постійного поперечного перерізу, обкресленої по дузі окружності.

Для виводу рівняння коливань додамо в рівняння рівноваги сили інерції:

$$mR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \alpha} + N = 0; \quad (9)$$

$$mR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0, \quad (10)$$

де u – окружний компонент переміщення, v – радіальний, α – кутова координата перерізу.

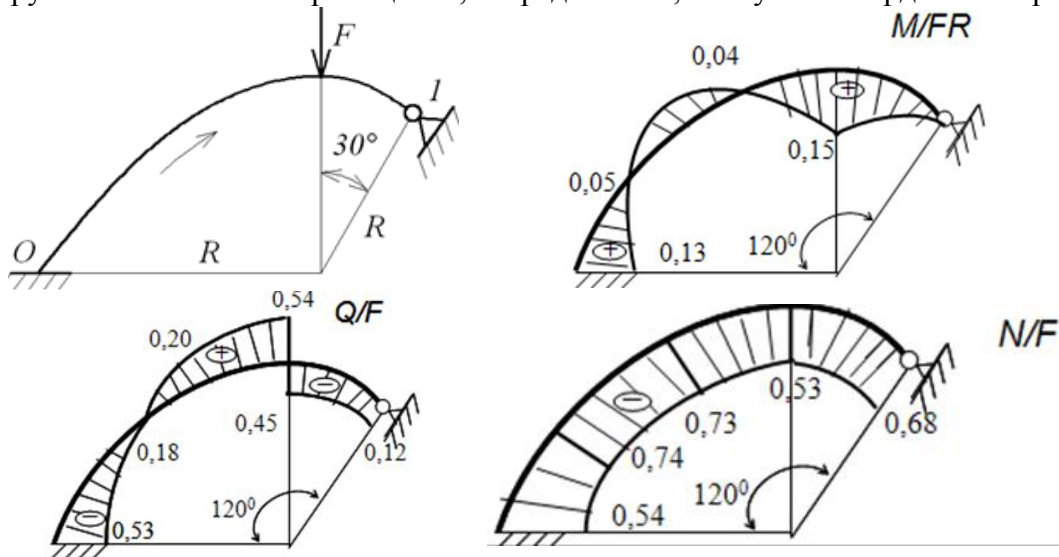


Рис. 2. Розрахункова схема та епюри

Після низки перетворень приходимо до диференціального рівняння

$$u^{VI} + 2u^{IV} + u'' - \frac{mR^4 \omega^2}{EI} (u'' - u) = 0. \quad (11)$$

Представимо вектор стану для арки у вигляді

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} EIv(\alpha) \\ EI\varphi(\alpha) \\ M(\alpha) \\ Q(\alpha) \\ EAu(\alpha) \\ N(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Наслідуючи звичайному алгоритму розв'язку методом граничних елементів, можна визначити всі параметри вектора стану (12). Для ω потрібно задавати інтервал зміни, наприклад, $(0, 1000) \text{ c}^{-1}$, після чого в процесі реалізації програми розрахунків в MATLAB здійснюється автоматичний перехід до обчислення фундаментальних функцій, відповідних до коренів характеристичного рівняння, відповідного (11).

Рівняння МГЕ для завдання про власні коливання арки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} & 0 & A_{16} \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} & 0 & A_{26} \\ -1 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & A_{36} \\ 0 & -1 & A_{43} & A_{44} & 0 & A_{46} \\ 0 & 0 & A_{53} & A_{54} & 0 & A_{56} \\ 0 & 0 & A_{63} & A_{64} & -1 & A_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} EIv(0) = 0; M(\alpha) \\ EI\varphi(0) = 0; Q(\alpha) \\ M(0) \\ Q(0) \\ EAu(0) = 0; N(\alpha) \\ N(0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} EIv(\alpha) = 0 \\ EI\varphi(\alpha) = 0 \\ M(\alpha) \\ Q(\alpha) \\ EAu(\alpha) = 0 \\ N(\alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Оскільки при власних коливаннях вектор граничних параметрів $X_*(0, \alpha_{sp}) \neq 0$, рівняння (13) має нетривіальний розв'язок за умови

$$|A_*(\omega, \alpha_{sp})| = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) є трансцендентним частотним рівнянням МГЕ для арки. Коріння цього рівняння – частоти власних коливань. Пошук коренів здійснено методом послідовних наближень з використанням MATLAB.

Порівняння 5 власних частот, обчислених по алгоритму МГЕ, з обчисленими в програмі ANSYS [5], наведене в табл. 1.

Таблиця 1 – Порівняння результатів МГЕ та МСЕ

Номер частоти	МГЕ, с ⁻¹	МСЕ, с ⁻¹	Розбіжність, %
1	65,625	65,069	0,85
2	106,080	120,618	12,05
3	206,819	220,119	6,04
4	271,575	304,559	10,83
5	341,290	402,714	15,25

Висновки та результати. Таким чином, при використанні методу граничних елементів для розв'язання задач статички та динаміки можна суттєво знизити трудомісткість розрахунків, спростити алгоритм, підвищити вірогідність результатів. Аналіз статичних розрахунків показує, що результат МГЕ з урахуванням деформації розтягання збігається з трьома значущими цифрами точного розв'язку, а точність результатів МГЕ без урахування деформації розтягання теж достатньо висока, хоча збігаються тільки 2 значущі цифри, тобто вплив деформацій зрушення й розтягання при заданих геометричних співвідношеннях жорсткого стрижня невелике. Розглянутий приклад визначення спектра власних частот арки із жорстко затисненими опорами по алгоритму МГЕ та методом скінченних елементів у програмі ANSYS доводить, що результати двох методів добре узгоджуються між собою.

Література:

1. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. К.: Будівельник, 1970. 435 с.
2. Варвак П.М. Метод конечных элементов. К.: Вища школа, 1981. 176 с.
3. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 225 с.
4. Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численно-аналитический метод граничных элементов. Одесса: ВМВ, 2010. В 2-х томах. Т.1. 416 с. Т.2. 512 с.
5. Лазарева Д.В., Сорока М.М., Шиляев О.С. Прийоми роботи з ПК ANSYS при розв'язанні задач механіки. Під редакцією М.Г. Сур'янінова: монографія. Одеса: ОДАБА, 2020. 432 с.

УДК 693

СУЧАСНІ МЕТОДИ ПОСИЛЕННЯ КАМ'ЯНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Апостол Є.Л., студ. гр. ПЦБ-276

Науковий керівник – **Гриньова І.І.**, к.т.н., старший викладач (кафедра Архітектурних конструкцій, Одеська державна академія будівництва та архітектури)

Анотація. Стаття присвячена образу на сучасні методи посилення кам'яних конструкцій в Україні.

Актуальність. За останні 10-15 років в Україні значно збільшився обсяг робіт з реконструкції (в тому числі реставрації і капітальному ремонту) будівель і споруд різного призначення. Для забезпечення достатньої міцності, стійкості та можливості стін до подальшої експлуатації необхідно підсилити пошкоджені (під час експлуатації та навантажень) конструкції.

Підсилення конструкцій. Основні причини посилення та види дефектів споруд. Підсилення конструкцій – невід'ємна частина будівництва та експлуатації будівель та