УДК 624.012.45:624.075.23

ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

М.М.Бекирова, А.Н.Орлов *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Решена задача для однородных и неоднородных стержней при описании кривых ползучести функциями достаточно общего вида. Критическая сила при длительном действии нагрузки зависит только от нестареющей части деформаций ползучести.

В расчётах на устойчивость при длительном действии нагрузок необходимо определять силы, при которых скорость перемещений монотонно затухает. Решение задачи в такой постановке приемлемо для систем, развитие перемещений которых во времени приводит к изменению напряжённого состояния. Это условие для сжатого стержня выполняется при наличии начальных несовершенств (внецентренное приложение сжимающей силы, начальная погибь и др.)

Решение задачи об устойчивости однородных и неоднородных (в частности, железобетонных) стержней выполнено в предположении линейной ползучести и отсутствии трещин.

Обычно при изучении влияния ползучести на устойчивость сжатых стержней рассматриваются стержни, шарнирно опёртые по концам; мера ползучести материала $C(t,\tau)$ описывается простейшими функциями, позво-ляющими решать соответствующие интегральные уравнения в аналитическом виде, но не всегда достаточно полно описывающими экспериментальные кривые ползучести [1].

В статье такая задача решена для однородных и неоднородных стержней при описании кривых ползучести функциями достаточно общего вида. Принято, что граничные условия постоянны во всём рассматриваемом промежутке времени $t_o \leq t \leq \infty$

Принята зависимость

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_o}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau) \qquad (1)$$

Рассматривается гибкий железобетонный стержень с постоянным поперечным сечением, имеющим две оси симметрии y и z . Армирование симметричное. Длина стержня – l. Стержень сжат постоянной во времени силой F. Считается, что несовершенство в виде погиби или эксцентриситета приводит к выпучиванию стержня в направлении оси y. Выпучивание в направлении оси z исключается.

Используя соотношения:

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{\varepsilon_1(x,t)-\varepsilon_2(x,t)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\begin{cases}-\dfrac{\partial^2\left[y(x,t)-y_o(x)\right]}{\partial x^2}\\[2ex] -\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\end{cases} \tag{3}$$

а также уравнения равновесия и зависимость (1), получим интегро-дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня:

$$(1+r)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+\frac{F}{EI_b}y(x,t)-\int_{t_o}^{t}\left[rE\frac{\partial^2 y(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{F}{I_b}y(x,\tau)\right]*$$

$$*\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\begin{cases}\left[1+rE\delta(t,t_o)\right]\dfrac{\partial^2 y_o(x)}{\partial x^2}\\[2ex] -\dfrac{F}{I_b}S\delta(t,t_o)\end{cases} \tag{4}$$

Здесь: $r=\dfrac{h_1^2A_sE_s}{I_bE}$, $\quad E(t)=E(t_o)=E=const$

A_s - площадь арматуры;

I_b - момент инерции бетонной составляющей сечения;

h_1 - расстояние между центрами тяжести сечения и арматуры;

$y_o(x)$ - начальное искривление (погибь);

S - эксцентриситет.

Верхние выражения в (3) и (4) относятся к стержню с погибью, а нижние – к стержню с внецентренной нагрузкой.

В приведенном виде интегро-дифференциальное уравнение (4) может использоваться при рассмотрении стержней шарнирно-опёртых по концам.

После двойного дифференцирования по x, это уравнение становится пригодным для решения задач с любыми условиями опирания.

$$(1+r)\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+\frac{F}{EI_b}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}-\int_{t_o}^{t}\left[rE\frac{\partial^4 y(x,\tau)}{\partial x^4}+\frac{F}{I_b}\frac{\partial^2 y(x,\tau)}{\partial x^2}\right]*$$

$$*\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}=\begin{cases}\left[1+rE\delta(t,t_o)\right]\dfrac{\partial^4 y_o(x)}{\partial x^4}\\ 0\end{cases} \tag{5}$$

При $t=t_o$ интегро-дифференциальное уравнение (5) превращается в известное дифференциальное уравнение упруго мгновенной задачи [2].

При представлении меры ползучести $C(t,\tau)$ в виде ряда типа предложенного Н.Х. Арутюняном [3],

$$\begin{gathered}C(t,\tau)=\sum_{i=1}^{i=k}\theta_i(\tau)\left[1-e^{-\gamma i(t-\tau)}\right],\\ \frac{\partial\theta i(\tau)}{\partial\tau}\prec 0,\theta_i(\tau)\Big|_{t\to\infty}\to C_i\end{gathered} \tag{6}$$

и принятии k=2, интегро-дифференциальное уравнение (5) сводится к дифференциальному уравнению седьмого порядка с частными производными

$$\begin{gathered}B_1(t)\frac{\partial^7 y(x,t)}{\partial t^3\partial x^4}+B_2(t)\frac{\partial^6 y(x,t)}{\partial t^2 x^4}+B_3(t)\frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t\partial x^4}+\\ +B_4(t)\frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t^3\partial x^2}+B_5(t)\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2\partial x^2}+B_6(t)\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t\partial x^2}=0\end{gathered} \tag{7}$$

$B_1(t)$, $B_2(t)$,…,$B_6(t)$ - функции t, связанные с известными функциями и постоянными, входящими в (5), включая величину сжимающей силы F

Для стержней как с начальной погибью, так и внецентренно приложенной нагрузкой, получалось совершенно одинаковое уравнение (7). Но это не говорит о том, что и решения будут одинаковыми, так как для этих двух случаев различны как граничные, так и начальные условия.

Дифференциальное уравнение (7) – уравнение движения стержня. Исследуя (7), можно установить тенденции в развитии перемещений в зависимости от величины сжимающей силы. Если перемещения при $t \to \infty$ стремятся к конечной величине, то состояние стержня следует считать устойчивым и наоборот, если перемещения неограниченно возрастают, то состояние стержня неустойчиво.

При длительном действии нагрузки критической следует считать силу, вызывающую при $t \to \infty$ скорость перемещений стержня, стремящуюся к постоянной величине, а перемещения – к бесконечности.

Учитывая это, а также то, что принятые в сформулированном выше определении характеристики перемещений справедливы для любого сечения стержня по его длине, можно определять величину критической силы в условиях ползучести, исходя из условий:

$$\begin{aligned} &y(x,t) \to \infty, \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \to const, \\ &\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \to 0, \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t^3} \to 0 \end{aligned} \tag{8}$$

а также $A_3(t) \to \gamma_1\gamma_2\left[1 + r(1+C)\right], A_6(t) \to \gamma_1\gamma_2(1+C)\dfrac{F}{EI_6}$,

где – $C = E(C_1 + C_2)$ - предельная характеристика нестареющей, полностью обратимой части деформаций ползучести.

При выполнении условий (8) из уравнения (7) можно получить дифференциальное уравнение в обыкновенных производных:

$$\frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} + \frac{F}{EI_b}\frac{1+C}{1+r(1+C)}\frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = 0 \tag{9}$$

Из решения уравнения (5), учитывая, что при $t \to \infty$ $y(x,t) \to \infty$, всегда можно получить критические силы при длительном действии нагрузки:

$$F_{дл} = F_э(r + \frac{1}{1+C}); \qquad F_{кр} = F_э(1+r) \tag{10}$$

где $F_{дл}$ – критическая сила при длительном действии нагрузки;

$F_{кр}$– критическая сила при кратковременном действии нагрузки;

$F_э$ – эйлерова сила для деформированного стержня.

Если стержень однороден, то r=0.

Зависимости (10) справедливы для стержней с различными условиями опирания.

Анализ интегро-дифференциального уравнения (9) показывает, что формулы (10) справедливы не только при k=2 в ряде (6), но и при любом количестве членов этого ряда.

В общем случае $$C = E\sum_{i=1}^{i=k} C_i \qquad (11)$$

Выводы

1. Из всего сказанного очевидно, что полученные выводы являются общими и критическая сила при длительном действии нагрузки зависит только от нестареющей части деформаций ползучести. Последнее связано с условностью принятой формулировки понятия критической силы, в соответствии с которой величина этой силы определяется по характеру движения стержня при t , то есть тогда, когда закончился процесс старения материала.
2. Понятно, что формулы (10) позволяют проверять только устойчивость стержней. Прочность стержней, даже при , должна проверяться дополнительно, с учётом развития перемещений во времени.

Литература

1. Прокопович И.Е. Основы прикладной линейной теории ползучести. - К.: Вища школа, 1978.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. - М.: Физматгиз, 1963.
3. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. - М.: Гостехиздат, 1952.